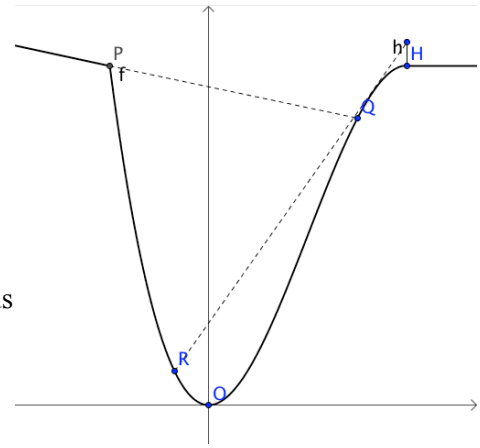
Gymnasium Leichlingen
2008 13m$_1$ Lö 2007/08.2 Aufgaben/Lösungen der **Klausur Nr. 3** von 2008-03-11
Zeit: 180‘

Aufgabe 1

Ein Flusstal soll mithilfe einer Funktion f beschrieben werden. Dazu wird folgender Ansatz gemacht:

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{4}x^2$$

Zwischen dem Hochpunkt H des Graphen von f und dem Punkt P(-2|f(-2)) wird das Flusstal durch den Graphen von f beschrieben. Des Weiteren verläuft das Profil des angrenzenden Geländes von H aus horizontal (nach rechts) und von P aus in Richtung der Geraden durch die Punkte P und Q(3 | f(3)). Die nebenstehende Skizze dient nur der Orientierung und ist nicht maßstabsgetreu.



a) Untersuche den Graphen der Funktion f auf gemeinsame Punkte mit den Koordinatenachsen sowie auf Hoch-, Tief- und Wendepunkte (unabhängig vom Kontext der Aufgabe). Bestimme die Gleichung der Geraden durch P und Q; gib Funktionsterme zu f(x) für x < -2 und x > 4 an.

Lösung:

Wegen f(0) = 0 verläuft der Graph von f durch den Ursprung; an der Faktorzerlegung $f(x) = -x^2(x-6)/8$ liest man für den Funktionsterm von f die weitere Nullstelle 6 ab. (Diese liegt außerhalb des im Kontext der Aufgabe betrachteten Graphenverlaufs von P zu H.)

Die erste Ableitung hat wegen $f'(x) = -3x^2/8 + 3x/2 = -3x(x-4)/8$ die Nullstellenmenge $O_{f'}=\{0; 4\}$.
Da f‘ bei 0 einen minus/plus- und bei 4 einen plus/minus-Vorzeichenwechsel hat, liegt bei 0 in Minimum und bei 4 ein Maximum.
Tiefpunkt ist also der Ursprung, relativer Hochpunkt ist H(4|4).

Die zweite Ableitung hat wegen $f''(x) = -3x/4 + 3/2 = -3(x-2)/4$ eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel bei 2; wegen f(2) = 2 ist daher ist W(2|2) ein Wendepunkt.

Die Gerade durch P und Q hat die Gleichung $y = y_P + (y_Q-y_P)/(x_Q-x_P)\ (x - x_P)$; wegen f(3) = 3,375 erhält man somit die Gleichung y = 4 + (3,375-4)/(3+2) (x + 2), also y = - 0,125x + 3,75 .

Ergebnisse: **Schnittpunkt mit der y-Achse ist O, Schnittpunkte mit der x-Achse sind O und S(6|0).**
O ist auch gleichzeitig Tiefpunkt; Hochpunkte sind H(4|4) und P(-2|4);
Wendepunkt ist W(2|2);
g hat die Gleichung y = - 0,125x + 3,75 .
Für x außerhalb von [-2;4] ist f(x) = - 0,125x + 3,75 für x < -2; und es ist f(x) = 4 für x > 4.

b) Bei einem starken Hochwasser stieg das Wasser bis zum Punkt H. Berechne den Inhalt der Querschnittsfläche des dann mit Wasser gefüllten Tales.

Lösung:

Die Fläche, deren Inhalt zu berechnen ist, wird oben von der Geraden durch P und H, also der Horizontalen mit der Gleichung y = 4, und von unten vom Graphen von f eingeschlossen.
Da das zugehörige Intervall auf der x-Achse von -2 bis 4 reicht, ist zur Berechnung des gesuchten Flächeninhalts A die Funktion mit dem Term 4 - f(x) über [-2; 4] zu integrieren:

$$A = \int_{-2}^{4} (4 - f(x))dx = \int_{-2}^{4} (4 + \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2)dx = \left[4x + \frac{1}{32}x^4 - \frac{1}{4}x^3\right]_{-2}^{4}$$

$$= 4 \cdot 4 + \frac{1}{32} \cdot 4^4 - \frac{1}{4} \cdot 4^3 - \left(4 \cdot (-2) + \frac{1}{32} \cdot (-2)^4 - \frac{1}{4} \cdot (-2)^3\right)$$

$$= 16 + 8 - 16 - (-8 + \frac{1}{2} + 2) = 13{,}5\,.$$

Ergebnis: **Der Inhalt der Querschnittfläche beträgt 13,5 Flächeneinheiten.**

c) Von H soll eine unterirdische, gerade Leitung ausgehen, deren Darstellung in der Skizze bei einem Punkt B(u | f(u)) mit $0 < u < 4$ endet. Bestimme B so, dass die Leitung möglichst steil verläuft.

Lösung:
Der Verlauf der Leitung ist am steilsten, wenn sie den Graphen von f im Punkte B berührt. Es wird also die durch H gezogene Gerade gesucht, die Tangente des Graphen in einem Punkt zwischen O und H ist. Gleichsetzen der Steigung der Geraden durch H und B mit der Steigung des Graphen von f im Punkte B liefert die Gleichung $(y_H - f(u))/(x_H-u) = f'(u)$. Einsetzen der Werte und Funktionsterme ergibt:

$$\frac{4 + \frac{1}{8}u^3 - \frac{3}{4}u^2}{4 - u} = -\frac{3}{8}u^2 + \frac{3}{2}u; \quad \text{Multiplikation beider Seiten mit } 8(4-u):$$

$$32 + u^3 - 6u^2 = (4 - u)(-3u^2 + 12u)$$

Ausmultiplizieren der rechten Seite, Zusammenfassen und Dividieren beider Seiten durch 2 ergibt:

$32 + u^3 - 6u^2 = -12u^2 + 48u + 3u^3 - 12u^2$

$2u^3 - 18u^2 + 48u - 32 = 0$, also $u^3 - 9u^2 + 24u - 16 = 0$.

Faktorisieren, z.B. durch zweimalige Division durch (u-4) ergibt schließlich $(u-4)^2 (u-1) = 1$.

Die einzige Lösung im betrachteten Intervall ist also u = 1. Wegen f(1) = 0,625 erhält man:

Ergebnis: **Der Punkt B hat die Koordinaten (1 | 0,625)** .

d) Bei Trockenheit ist der Wasserspiegel bis zum Punkt R(-1 | f(-1)) abgesunken.
Gib einen vollständigen Lösungsplan an zur Beantwortung der Frage „Ab welcher Höhe h über dem Hochpunkt H ist dieser Punkt R zu sehen?“. Eine rechnerische Durchführung ist nicht erforderlich.

Lösung:
(1) Zunächst wird analog zu Aufgabenteil c (also mit dem Ansatz $f'(x_T)\cdot(x_R - x_{T)} = y_R - y_T$) der x-Wert x_T des Punktes T auf dem Graphen bestimmt, für den die Gerade durch R und T eine Tangente ist.
(2) Durch Einsetzen des Wertes x_T in die Funktionsgleichung von f ergibt sich dann die Koordinate y_T.
(3) Danach wird der Funktionsterm t(x) der Geraden durch R und T, also der von R aus an den Graphen gezogenen Tangente bestimmt.
(4) Die gesuchte Höhe h ergibt sich schließlich als $t(x_H) - y_H$.

Nachfolgend wird die in der Klausur nicht verlangte Berechnung von h ausgeführt:
Bezeichnet man den Punkt, an dem die gesuchte Tangente den Graphen von f berührt, mit T(u | f(u)), also $u = x_T$, dann hat die Tangente einerseits als Gerade durch R und T die Steigung $(y_T - y_R)/(u - x_R)$, andererseits als im Punkt T angelegte Tangente die Steigung $f'(u)$.
Wegen f(-1) = 7/8 ergibt sich entsprechend dem Ansatz zum Aufgabenteil c) daher die Gleichung $f(u) - 7/8 = (u + 1) \cdot f'(u)$, also nach Einsetzen der Terme für f(u), $f'(u)$ und Multiplikation mit 8
$- u^3 + 6u^2 - 7 = (u+1)(-3u^2 + 12u)$, also $- u^3 + 6u^2 - 7 = -3u^3 + 9u^2 + 12u$.

Dies liefert

$2u^3 - 3u^2 - 12u - 7 = 0$. Da -1 eine Lösung ist, kann man (u+1) ausklammern: $(u+1)(2u^2 - 5u - 7) = 0$;

durch erneutes Ausklammern von u+1 ergibt sich schließlich $(u+1)^2(2u-7) = 0$;
die gesuchte Berührstelle ist also u = 3,5.

Die betrachtete Tangente hat die Gleichung $t(x) = y_R + m_{RT}(x-x_R)$, also wegen $m_{RT}=f'(3,5) = 0,65625$:
$t(x) = 0,875 + 0,65625(x + 1)$; somit ist $h = t(4) - 4 = 0,875 + 0,65625 \cdot 5 - 4 = 0,15625$;

Ergebnis: **Der Punkt R ist ab der Höhe 0,15625 zu sehen.**

Aufgabe 2

Gegeben ist der Punkt P(12 | 16) in der x-y-Ebene. Die 90º-Drehung f dieser Ebene um den Ursprung ist bekanntlich eine lineare Abbildung des Raumes $\mathbf{R}^2$ in sich.

a) Beschreibe, wie die Matrix einer linearen Abbildung aufgebaut ist, und gib die Matrix von f an.

Lösung:

Die Matrix einer linearen Abbildung des Raumes $\mathbf{R}^n$ in sich ist eine Matrix aus n mal n Spalten; dabei sind die Spalten die Bilder der Einheitsvektoren.

Die gesuchte Matrix von f erhält man nun

- entweder durch die Überlegung: Bei der 90º-Drehung um den Ursprung geht der Einheitspunkt $E_1(1|0)$ in den Punkt (0|1), der Einheitspunkt $E_2(0|1)$ in den Punkt (-1|0) über,
- oder durch Verwendung der aus dem Unterricht bekannten (oder der Formelsammlung entnommenen) Matrix:

Die α-Drehung der Ebene um **O** hat die Matrix $M = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$

mit Einsetzen cos(90º) = 0; sin((90º) = 1.

Ergebnis: **Die gesuchte Abbildungsmatrix hat die Spalten $(0 \mid 1)^T$ und $(-1 \mid 0)^T$.**

b) Bezeichne den Bildpunkt von P bei der Drehung aus a) mit R und bestimme die Koordinaten von R sowie die Koordinaten der vierten Ecke Q des Quadrats OPQR.

Lösung:

Die 90º-Drehung führt den Punkt P in den Punkt R über:

$$\mathfrak{r} = f(\mathfrak{p}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{p} + \mathfrak{r} = \begin{pmatrix} 12 \\ 16 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -16 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 28 \end{pmatrix}.$$

Ergebnisse: **R hat die Koordinaten (- 16 | 12), Q hat die Koordinaten (- 4 | 28).**

c) Senkrecht zur x-y-Ebene wird nun durch den Ursprung eine dritte Achse (z-Achse) gelegt. Im neuen, nun räumlichen Koordinatensystem hat P die Koordinaten (12 | 16 | 0). Ergänze das Quadrat OPQR zu einem Würfel OPQRSTUV und zeige, dass W(- 2 | 14 | 10) der Schwerpunkt des Würfels ist.

Lösung:

Die Kantenlänge des Würfels ist die Länge der Strecke OP, also 20 (Norm von $\boldsymbol{p}$). Die vier Ecken des Grundflächenquadrats werden um 20 Einheiten in Richtung der positiven z-Achse verschoben. Die vier anderen Ecken des Würfels sind also S(0 | 0 | 20), T(12 | 16 | 20), U(-4 | 28 | 20), V(-16 | 12 | 20).

Der Ortsvektor w des Schwerpunkts ergibt sich nach der Schwerpunktformel als

$\boldsymbol{w} = (1/8)\ (\boldsymbol{o} + \boldsymbol{p} + \boldsymbol{q} + \boldsymbol{r} + \boldsymbol{s} + \boldsymbol{t} + \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v})$;

oder einfacher aufgrund der Symmetrieeigenschaften des Würfels der Schwerpunkt als Mittelpunkt einer Raumdiagonale, also z.B. von OU:

$$W = (- 4/2 \mid 28/2 \mid 20/2) = (- 2 \mid 14 \mid 10).$$

d) Durch die Punkte O, P und W wird eine Ebene ***E*** gelegt. Ermittle Parametergleichung und Koordinatengleichung von ***E*** und bestimme den Winkel α , den ***E*** mit der x-y-Ebene bildet.

Lösung:
Mit dem Aufpunkt O und den Richtungsvektoren ***p*** und ***w*** erhält man die folgende Parameterdarstellung von ***E***: $\boldsymbol{x} = r\,\boldsymbol{p} + s\,\boldsymbol{w}$,

also $\boldsymbol{x} = r' (12 \mid 16 \mid 0)^T + s' (-2 \mid 14 \mid 10)^T$.

oder mit vereinfachten Richtungsvektoren $\boldsymbol{x} = r (3 \mid 4 \mid 0)^T + s (- 1 \mid 7 \mid 5)^T$.

Das Kreuzprodukt der Richtungsvektoren ergibt ein Vielfaches des Normalenvektors $\boldsymbol{n_E}$ von ***E***.

$$\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-1\\7\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}20\\-15\\25\end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix}4\\-3\\5\end{pmatrix}$$

Ein geeigneter Normalenvektor ist somit $\boldsymbol{n_E} = (4 \mid -3 \mid 5)^T$;
E hat die Gleichung 4x - 3y + 5z = 0.

Der Kosinus des gesuchten Winkels ergibt sich mithilfe der Normalenvektoren der x-y-Ebene und der Ebene ***E*** nach der Formel:

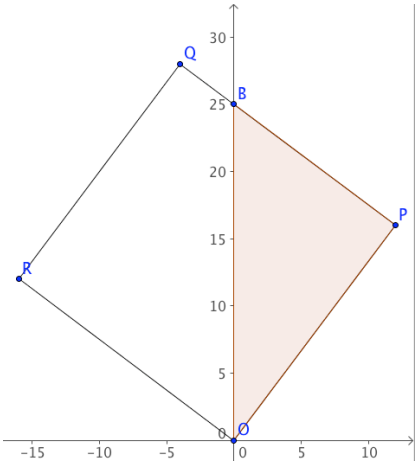
$$\cos(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}4\\-3\\5\end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\| \cdot \left\|\begin{pmatrix}4\\-3\\5\end{pmatrix}\right\|} = \frac{5}{\sqrt{50}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \cos(45°)$$

Ergebnisse: **Eine Parametergleichung von *E* ist $\boldsymbol{x} = r\,(3 \mid 4 \mid 0)^T + s\,(-1 \mid 7 \mid 5)^T$,**
die Koordinatengleichung von *E* lautet 4x - 3y + 5z = 0,
die Größe des Winkels α, den *E* mit der x-y-Ebene bildet, beträgt 45° .

e) Die Ursprungsebene ***F***, die senkrecht zur x-Achse verläuft, zerschneidet den Würfel in zwei Teile. Welche Masse hat der kleinere der beiden Teile, wenn die Masse des gesamten Würfels 8 kg beträgt?
Hinweis: Der Anteil des abgeschnittenen Würfelstücks am ganzen Würfel ist der gleiche wie der Anteil des durch die y-Achse vom Quadrat OPQR abgetrennten Dreiecks an der Grundfläche des Würfels.

Lösung:
Die Strecke PQ hat die Steigung $m = (y_P - y_Q)/(x_P - x_Q) = (16 - 28)/(12 + 4) = -12/16 = -3/4$.

Die Gerade durch P und Q hat die Gleichung $y = y_P + m(x - x_P)$, also $y = 16 - 0{,}75(x - 12)$;
somit beträgt ihr y-Achsen-Abschnitt $16 + 0{,}75 \cdot 12 = 25$.



Wird der Schnittpunkt von PQ mit der y-Achse mit B bezeichnet, dann hat das Dreieck OPB zur Grundseite BO die Grundseitenlänge 25 und die Höhe 12, also den Flächeninhalt 25 12 / 2 = 150.
Das ist - bezogen auf die gesamte Grundfläche von 400 ein Anteil von 150/400, also 3/8.
Der Anteil des abgeschnittenen Stücks am Gesamtvolumen und der Gesamtmasse beträgt somit ebenfalls 3/8.
Die gesuchte Masse ist somit 3/8 · 8 kg, also 3 kg

Ergebnis: **Die gesuchte Masse beträgt 3 kg.**