PolynomX

Kurvenuntersuchung von Polynomen 3. bis 5. Grades mit ganzzahligen Koeffizienten

Klaus-R. Löffler

Vorbemerkungen

Kurvendiskussionen werden ja von manchen Schülern für schwer gehalten, viele empfinden sie allerdings - wohl wegen des schematischen Verfahrens - eher schlicht als langweilig. Bei den Themenartikeln auf meiner Homepage ist (auf Grundkursniveau) eine mögliche Vorgehensweise beschrieben.
Das nachfolgend erläuterte Programm PolynomX (vorliegend in Mac-Version und in Windows-Version) führt bei hinreichend einfachen Funktionen (ganzrationalen Funktionen dritten bis fünften Grades mit ganzzahligen Koeffizienten) eine vollstndige Untersuchung durch und gibt dabei auch die jeweiligen algorithmischen Schritte an; auf Wunsch wird der Graph unter Kennzeichnung aller kritischen Punkte skizziert. Ist eine vollständige Untersuchung mit den üblichen schulischen Mitteln nicht mglich - z.B. weil Gleichungen hheren als 2. Grades zu lösen sind - werden die erforderlichen Nullstellenbestimmungen auf Wunsch mit approximativem Verfahren durchgeführt.
Integriert ist das Programm Interpolation zur Bestimmung von Interpolationspolynomen für maximal neun Stützstellen sowie der Gleichungs-Löser für Gleichungen bis zum zehnten Grad.

Das Polynomfenster

Nach dem Start öffnet sich das Polynomfenster, so dass man wahlweise ein Polynom eingeben kann oder

- eines der auf der Fußleiste des Fensters angebotenen Beispiele 1 bis 9 wählen kann,
- zum Gleichungslöser wechseln kann,
- zum Interpolationsfenster wechseln kann.

Nach Eingabe eines Funktionsterms wir durch Drücken des Buttons *Verlauf Untersuchen* gemäß der Angabe der Verlauf des Graphen untersucht und beschrieben; falls hier die schulischen Mittel nicht ausreichen, z.B. weil eine Gleichung dritten Grades zu lösen ist, wird die Untersuchung wahlweise auf schulgngige Verfahren beschränkt oder approximativ zu Ende geführt.
Bei dem dargestellten Beispiel wird die z.B. folgende Beschreibung des Kurvenverlaufs gegeben:
Der auf das abgeschlossene Intervall [-1 ; 7] eingeschränkte Graph von f

- beginnt im Anfangspunkt $A(-1|357)$ linksdrehend und fallend mit der Steigung -576 ,
- fällt linkksdrehend zum Nullpunkt $B(0|0)$ mit Steigung -180 ,
- fällt linkksdrehend zum lokalen Tiefpunkt $C(1|-75)$ mit Steigung 0 ,
- steigt linkksdrehend zum Wendepunkt $D(1.845299|-53.66667)$ mit Steigung 36.95042 ,
- steigt rechtsdrehend zum lokalen Hochpunkt $E(3|-27)$ mit Steigung 0 ,

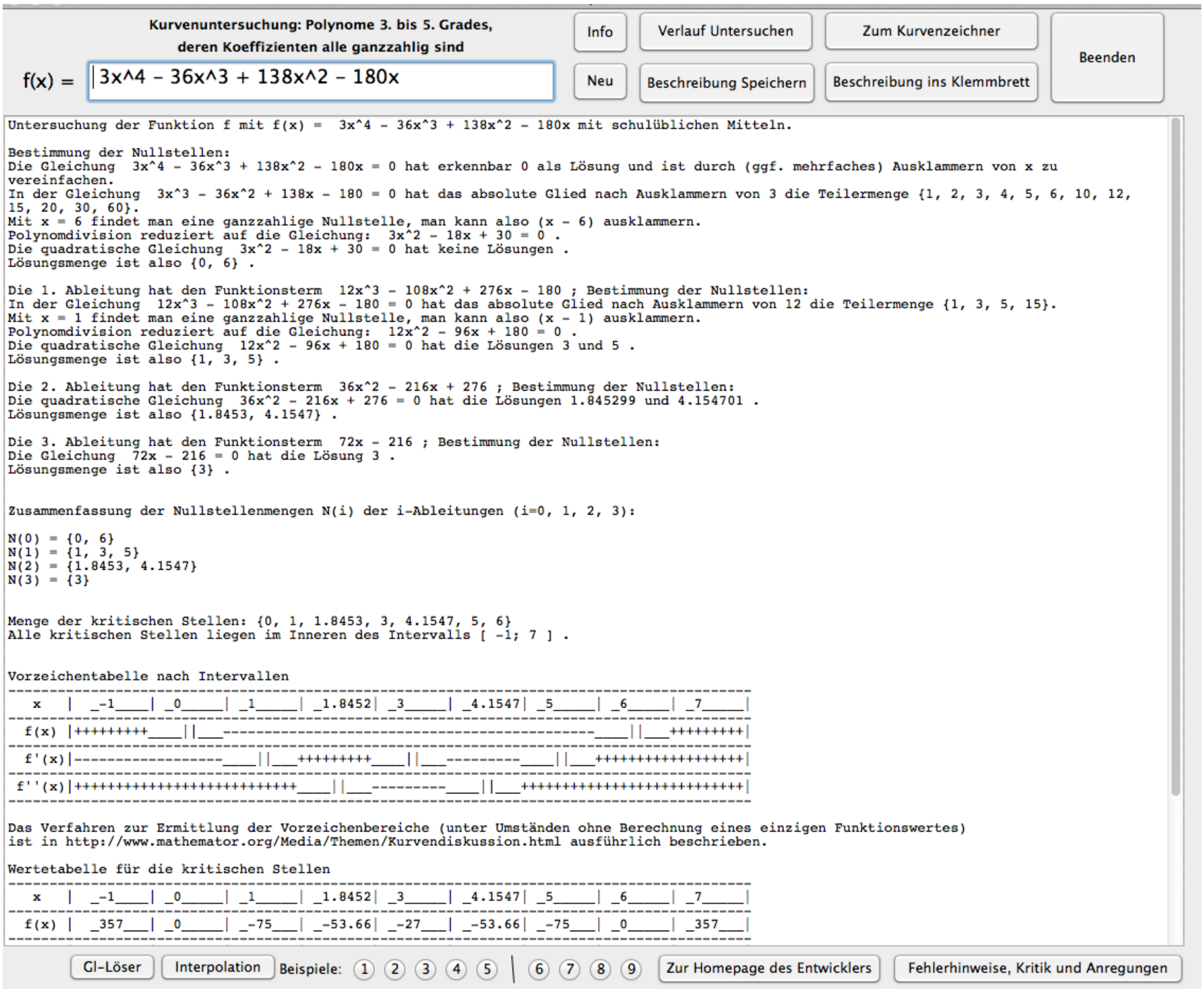

Abbildung 1: Polynomeingabe und Kurvendiskussionsausgabe

- fällt rechtsdrehend zum Wendepunkt $F(4.154701|-53.66667)$ mit Steigung -36.95042 ,
- fällt linkksdrehend zum lokalen Tiefpunkt $G(5|-75)$ mit Steigung 0 ,
- steigt linkksdrehend zum Nullpunkt $H(6|0)$ mit Steigung 180 ,
- und endet schließlich linksdrehend steigend mit der Steigung 576 im Endpunkt $I(7|357)$.

Nach erfolgter Kurvenuntersuchung kann durch Drücken des Buttons *Zum Kurvenzeichner* das Graphikfenster, also hier speziell das Kurvenfenster geöffnet werden.

Das Kurvenfenster

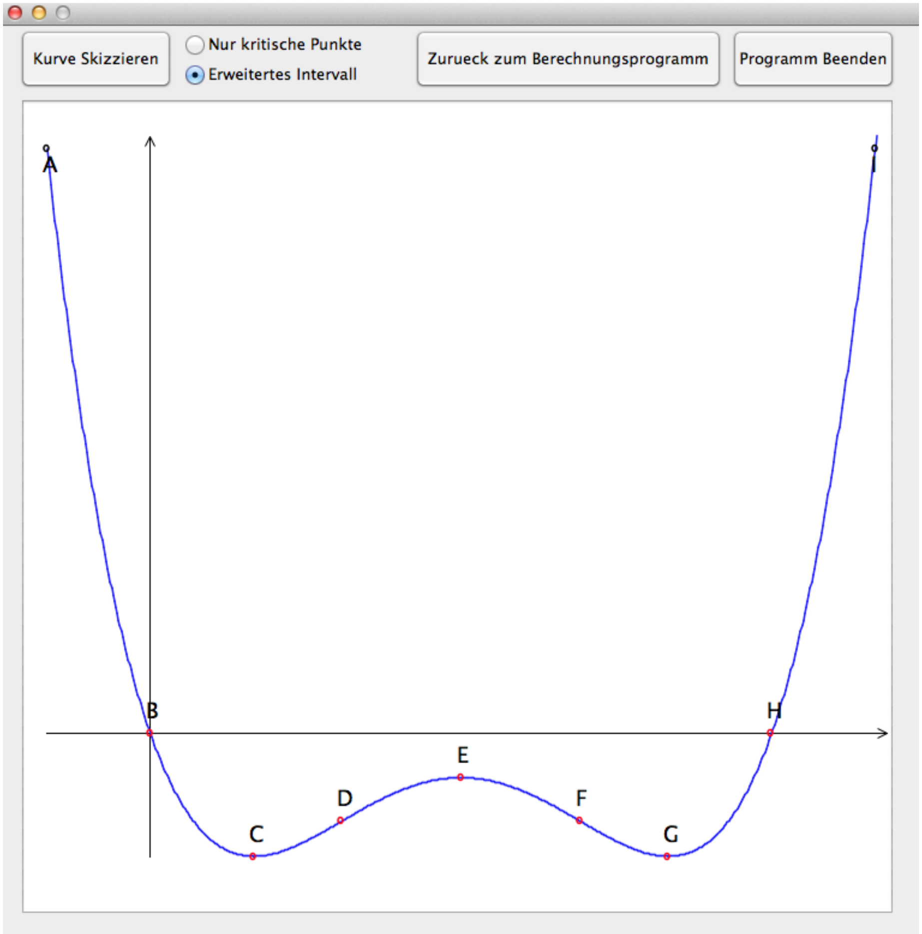

Abbildung 2: Darstellung der untersuchten Kurve

Die kritischen Punkte

Ein Punkt mit den Koordinaten $(x|f(x))$ wird bei dieser Betrachtung als *kritisch* bezeichnet, wenn x eine Nullstelle von f, f' oder f'' ist, da nur solche Punkte Nullpunkte oder Wendepunkte sein knnen. Dies gilt auch fr die Extrempunkte, wobei hier allerdings bei der eingeschränkten Betrachtung auf ein abgeschlossenes Intervall immer noch zusätzlich die Randpunkte (zumindest relative) Extrempunkte sind.
Die kritischen Punkte sind von links nach rechts durchbuchstabiert und rot gekennzeichnet.

Das erweiterte Intervall

Bei Wahl dieser Option wird nicht nur das alle kritischen Stellen umfassendste kleinste Intervall zugrunde gelegt, sondern ein etwas größeres, so dass alle ermittelten kritischen Stellen im Inneren liegen.

Das Interpolationsfenster

Will man ein Interpolationspolynom berechnen, also den Funktionsterm einer ganzrationalen Funktion f, die an einer vorgegeben Menge von Stellen (in diesem Programm maximal 10) vorgegebene Werte annehmen, so wird zuerst die Anzahl der Stützstellen eingegeben, dann die Stellen und die dort anzunehmenden Werte.

Wertetabelle

Im Mittelteil des Fensters können bis zu zehn Stellen angegeben werden, fr die bei der Berechnung der entsprechende Wert des Interpolationspolynoms angegeben wird.

Form der Ausgabe

Die Koeffizienten des Interpolationspolynoms werden als Dezimalbrüche (mit Punkt als Dezimal-Trennzeichen) angegeben. Da bei rationalen Koordinaten der Stützstellen auch die Koeffizienten des Interpolationspolynoms rational sind, kann das Polynom auch mit ausgeklammertem Hauptnenner angegeben werden. Hierzu wird durch den Button *Berechnen und ggf. Strecken* bei nicht zu großem Hauptnenner der Graph mit entsprechendem Faktor in Richtung der y-Achse gestreckt. Der Streckfaktor (im Beispiel 1080) wird angegeben.

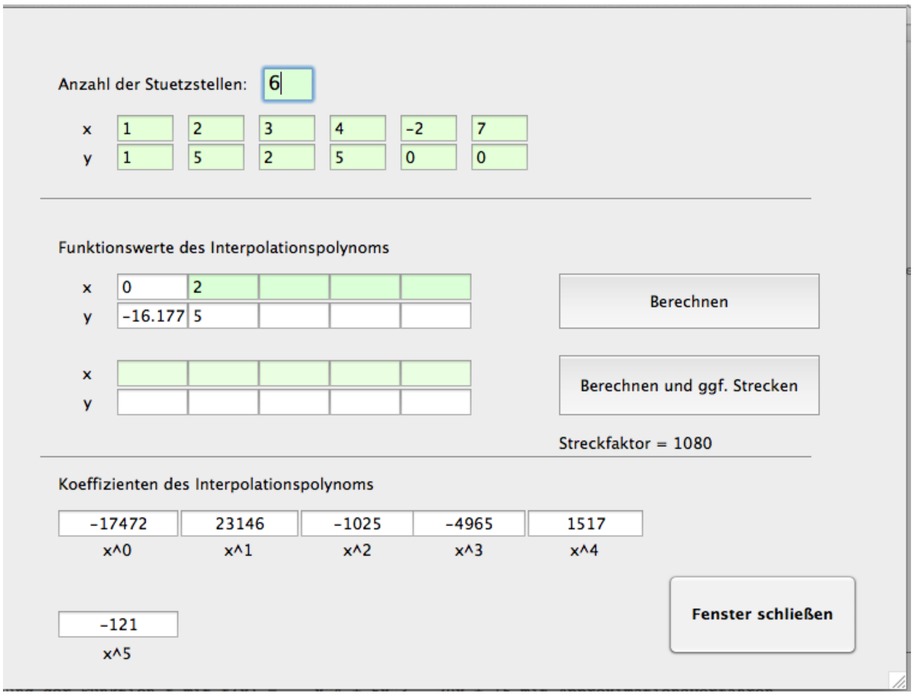

Abbildung 3: Eingabe der Stützstellen, Ausgabe des Polynoms, ggf. Streckung

Der Gleichungslöser

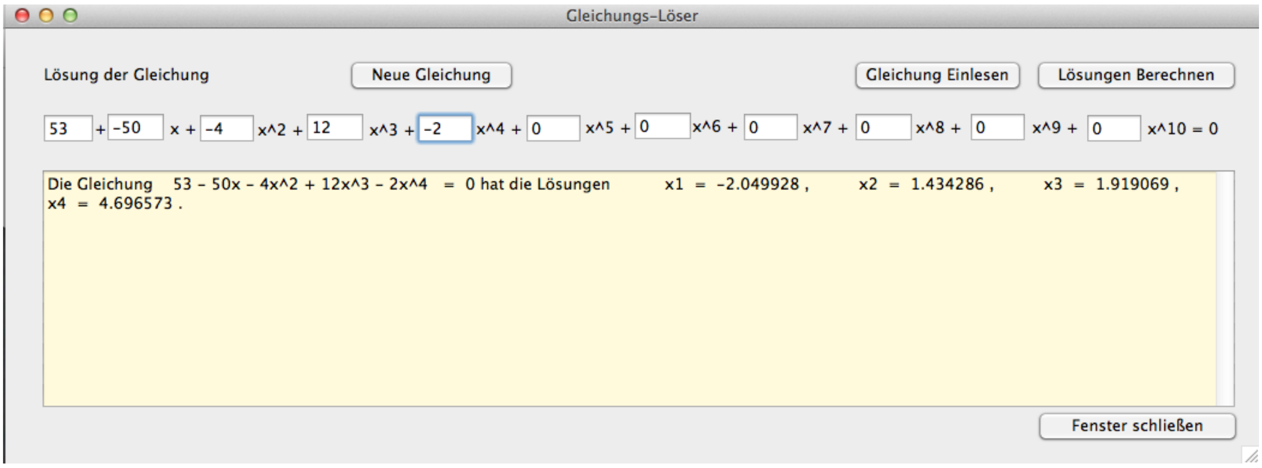

Abbildung 4: Eingabe der Gleichungskoeffizienten, Ausgabe der Lösungen

Eingabe der Gleichung

Die zu lösende Gleichung hat die Form $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = 0$. Dabei beträgt der Grad n der Gleichung maximal 10.
Im dargestellten Beispiel wird die Gleichung $-2x^4 + 12x^3 - 4x^2 - 50x = -53$ gelöst; daher sind im Fenster die Koeffizienten $a_0 = 53$, $a_1 = -5$, $a_2 = -4$, $a_3 = 12$, $a_4 = -2$ einzutragen. Die Eingabe wird durch Drücken des Buttons *Gleichung Einlesen* abgeschlossen. Die Gleichung wird in geschlossener Form ausgegeben und kann so noch einmal kontrolliert und ggf. korrigiert werden.

Ausgabe von Gleichung und Lösungen

Nach Drücken des entsprechenden Buttons werden - unter Verwendung von Methoden der Analysis - sämtliche reellen Lösungen der Gleichung berechnet und als Dezimalbrüche angezeigt.

Zusätze

Das Programm *PolynomX* enthält neben den hier beschriebenen Anwendungen eine Reihe von zusätzlichen Möglichkeiten. So werden beim Starten des Programms mit gedrückter ALT-Taste Erweiterungen freigeschaltet, - zum Beispiel werden dann bei der Kurvendiskussion zusätzlich die Inhalte der von Graph und x-Achse eingeschlossenen Flächen berechnet.