Alternative Beweise

Klaus-R. Löffler

Inhaltsverzeichnis

Vorbemerkungen

Die nachfolgend angegebenen Beweise oder Beweisvarianten sind in gewisser Weise der Unterhaltungsmathematik zuzurechnen: Es geht darum, zu einigen bekannten und vertrauten Sätzen der Mathematik originelle Alternativen zu den geläufigen Beweisen anzugeben, nicht weil sie wichtig oder gar nötig sind, sondern einfach nur aus Spaß an der Mathematik. Dabei kann bereits eine verkürzende Schreibweise, die zu einer schnelleren Überprüfung der Voraussetzungen führt - wie beim Beispiel des verallgemeinerten Mittelwertsatzes - ein Anlass sein, diese Variante hier anzugeben.
Ich bin dankbar dafür, dass ich durch Anregungen aus der Newsgroup de.sci.math die Zahl der Beispiele von anfangs vier wesentlich erhöhen konnte, und würde mich über weitere Anregungen freuen.

1 Die Abzählbarkeit von $\mathbb{Q}$

1.1 Bemerkungen zum Satz und seinem Standardbeweis

Bekanntlich wird eine Menge M als *abzählbar* bezeichnet, wenn es eine bijektive Abbildung der positiven ganzen Zahlen in M gibt. Zum Nachweis der Abzählbarkeit einer unendlichen Menge M genügt es, die Existenz einer injektiven Abbildung von M in $\mathbb{N}^*$ oder einer surjektiven Abbildung von $\mathbb{N}^*$ in M zu zeigen. Wie leicht zu zeigen ist, reicht es bei diesen Überlegungen, sich anstatt auf ganz $\mathbb{Q}$ auf die Menge $\mathbb{Q}_+$ der positiven rationalen Zahlen zu beschränken.
Bei den elementaren Standardbeweisen werden die positiven rationalen Zahlen in einem über in allen ihren Darstellungen mit den Gitterpunkten des ersten Quadranten im Koordinatensystem identifiziert - zur Zahl $\frac{p}{q}$ gehört der Gitterpunkt mit den Koordinatenpaar $(p;q)$ - ; die Gitterpunkte lassen sich (nach Schrägzeilen, mäandrierend oder nach einem anderen Schema) durchnummerieren, wobei nur die Zahlen berücksichtigt werden, die nicht bereits in einer anderen Darstellung eine Nummer erhalten haben.
Damit erhält man die gewünschte bijektive Abbildung.

1.2 1. Beweisalternative

Man notiere jede positive rationale Zahl im Stellenwertsystem zur Basis 2; der Bruch $\frac{5}{7}$ zum Beispiel hat also dann die Form $\frac{101}{1111}$. Diesem Bruch ordne man nun eine positive ganze Zahl zu, indem man Zähler und Nenner, getrennt durch eine 2, hintereinanderschreibt. Im Beispiel gehört also dann zum Bruch $\frac{5}{7}$ der Wert 10121111.
Offensichtlich hat man damit eine injektive Abbildung von $\mathbb{Q}_+$ in $\mathbb{N}^*$ definiert.

1.2.1 Bemerkung

Selbstverständlich kann bei der obigen Konstruktion die Basis 2 durch jede andere Basis g ersetzt werden, als Trennziffer t (im Beispiel die 2) ist jede Ziffer ($t \geq g$) geeignet, und für die Deutung der erhaltenen ganzen Zahl kann jede Basis b ($b > t$) zu Grunde gelegt werden.

1.3 2. Beweisalternative

Jens Voss wies mich auf eine andere hübsche Beweismöglichkeit hin, bei der eine Bijektion t zwischen $\mathbb{Q}_+$ und $\mathbb{R}_+$ definiert wird (- hier leicht abgewandelt wiedergegeben):
Zunächst definiere man durch

$$\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} s(n) = (-1)^n \cdot \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$$

eine bijektive Abbildung von $\mathbb{N}$ in $\mathbb{Z}$. Weiter sei $(p_1, p_2, p_3, \ldots)$ die Folge der Primzahlen in natürlicher Anordnung.
Hat nun die positive ganze Zahl n die Primfaktorzerlegung

$$n = \prod_{i=1}^{\infty} p_i^{e_i},$$

so definiere man die Funktion t durch

$$t(n) = \prod_{i=1}^{\infty} p_i^{s(e_i)}.$$

Zum Beispiel ergibt sich für $n = 504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$:

$$e_1 = 3, \quad e_2 = 2, \quad e_3 = 0, \quad e_4 = 1, \quad \bigwedge_{i>4} e_i = 0,$$
$$s(e_1) = -2, \quad s(e_2) = 1, \quad s(e_3) = 0, \quad s(e_4) = -1, \quad \bigwedge_{i>4} s(e_i) = 0$$

und damit

$$t(504) = \frac{3^1}{2^2 \cdot 7} = \frac{3}{28}.$$

1.4 3. Beweisalternative

Eine weitere interessante Möglichkeit mit *Stern-Brocot-Bäumen* wurde von Helmut Richter in der mathematischen Newsgroup beschrieben; seine Darstellung wird nachfolgend in bis auf Notationsmarginalien unveränderter Form wiedergegegeben:
Man fängt dabei mit den Zahlen $(\frac{-1}{0})$, $\frac{0}{1}$ und $(\frac{1}{0})$ an, von denen zwei freilich keine rationalen Zahlen sind und daher im Ergebnis der Abzählung weggelassen werden.

- Bisherige Reihenfolge: $\frac{-1}{0} \leftrightarrow \frac{0}{1} \leftrightarrow \frac{1}{0}$; bis jetzt abgezählt: $\frac{0}{1}$.

In jedem weiten Schritt ersetzt man das „ $\leftrightarrow$ “zwischen $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ durch $\frac{a+c}{b+d}$, also

- Neue Reihenfolge: $\frac{-1}{0} \leftrightarrow \frac{-1}{1} \leftrightarrow \frac{0}{1} \leftrightarrow \frac{1}{1} \leftrightarrow \frac{1}{0}$; bis jetzt abgezählt: $\frac{0}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{1}{1}$.
- Neue Reihenfolge: $(\frac{-1}{0}) \leftrightarrow \frac{-2}{1} \leftrightarrow \frac{-1}{1} \leftrightarrow \frac{-1}{2} \leftrightarrow \frac{0}{1} \leftrightarrow \frac{1}{2} \leftrightarrow \frac{1}{1} \leftrightarrow \frac{2}{1} \leftrightarrow (\frac{1}{0})$;
  bis jetzt abgezählt: $\frac{0}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{1}{1}, \frac{-2}{1}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}$.

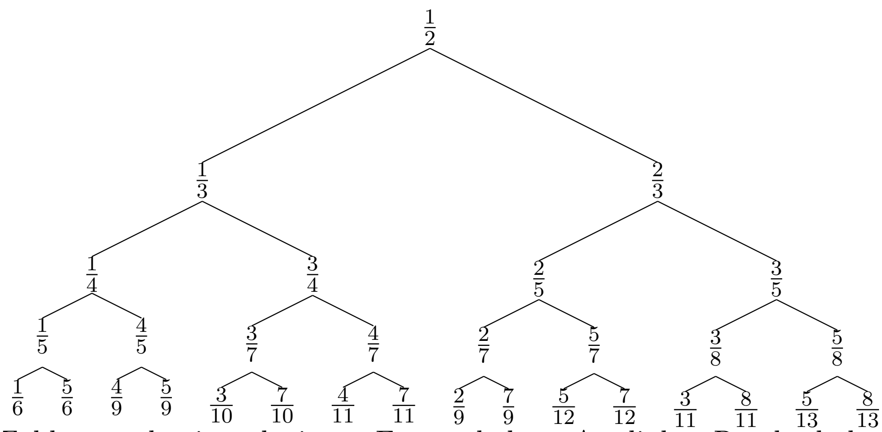
- Neue Reihenfolge:
  $(\frac{-1}{0}) \leftrightarrow \frac{-3}{1} \leftrightarrow \frac{-2}{1} \leftrightarrow \frac{-3}{2} \leftrightarrow \frac{-1}{1} \leftrightarrow \frac{-2}{3} \leftrightarrow \frac{-1}{2} \leftrightarrow \frac{-1}{3} \leftrightarrow \frac{0}{1} \leftrightarrow \frac{1}{3} \leftrightarrow \frac{1}{2} \leftrightarrow \frac{1}{1} \leftrightarrow \frac{2}{1} \leftrightarrow (\frac{1}{0})$;
  bis jetzt abgezählt: $\frac{0}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{1}{1}, \frac{-2}{1}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{-3}{1}, \frac{-3}{2}, \frac{-2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{3}{1}$.

- ...

Zu dem von ihm beschriebenen Verfahren bemerkt Helmut Richter: Gegenüber der klassischen Abzählung nach Schrägzeilen fällt das Weglassen der ungekürzten Brüche weg: alle Brüche sind gekürzt und alle rationalen Zahlen kommen genau einmal vor. Das zu zeigen ist allerdings mühsamer als wenn man die zu überspringenden Brüche in Kauf nimmt.

1.5 Wiederholungsfreie Abzählung mit einem binären Baum

In einer Aufgabe des Bundeswettbewerbs Mathematik aus dem Jahr 1976 war eine rationale Zahl r als Knoten eines binären Baums mit der Knotenmenge S so zu bestimmen, dass sich für S die Gesamtheit der rationalen Zahlen zwischen 0 und 1 ergibt, wenn die Kinder des Knotens $\frac{a}{b}$ jeweils $\frac{a}{a+b}$ und $\frac{b}{a+b}$ sind.
Die gesuchte Wurzel des Baums ist $r = \frac{1}{2}$. Der entstehende Baum (bis zu den vierten Nachfolgern) hat folgendes Aussehen:



Alle rationalen Zahlen werden in reduzierter Form erhalten. Am linken Rand erhält man die Stammbrüche, am rechten die Brüche aus den Nachbarzahlen der Fibonacci-Folge.

1.5.1 Bemerkung zu Abzählbarkeit und binärem Baum

Die Abzählbarkeit der Knoten in einem unendlichen binären Baum ist offensichtlich, zum Beispiel durch zeilenweises Abzählen. Zu jedem Knoten führt ein eindeutig bestimmter endlicher Pfad; beispielsweise gehört zu $\frac{3}{7}$ der Pfad (010).
Dagegen ist die Menge der unendlichen Pfade (also der Pfade ohne Endknoten) überabzählbar, da sich - analog zum zweiten Abzählverfahren von Cantor - zu jeder unendlichen Folge $f_n = (e_{ni})$ mit $e_{ni} \in \{0, 1\}$ eine Folge $g = (u_i)$ angeben lässt, die kein Glied der Folge (f_n) ist, indem man für jedes $i \in \mathbb{N}$ das i-te Folgenglied von g als $1 - e_{ii}$ definiert.

2 Die Irrationalität von $\sqrt{2}$

2.1 Bemerkungen zum Satz, seinem Standardbeweis und seinen Varianten

Der Satz, dass es keine rationale Zahl mit dem Quadrat 2 gibt, gehört zu den Musterbeispielen, an denen Schüler Beweisverfahren erlernen, - hier am Beispiel des indirekten Beweises. Zugleich wird mit diesem Ergebnis die Zweckmäßigkeit der Erweiterung des Bereichs der rationalen zu den reellen

Zahlen motiviert, da sich die Länge der Diagonale des Einheitsquadrats sonst nicht mit einer Zahl beschreiben lässt.
Der (indirekte) Beweis nimmt an, dass es einen Bruch $\frac{p}{q}$ mit natürlichen Zahlen p und q gibt, dessen Quadrat 2 ist. Durch Kürzen kann man erreichen, dass Zähler und Nenner nicht beide gerade Zahlen sind. Andererseits lässt sich auf die bekannte Weise aus der Bedingung $\frac{p^2}{q^2} = 2$ folgern, dass sowohl p als auch q gerade Zahlen sein müssen, was den gewünschten Widerspruch liefert.
Stefan Kirchner hat mich darauf hingewiesen, dass sich die Unerfüllbarkeit der Gleichung $2 \cdot q^2 = p^2$ bereits unmittelbar ergibt, wenn man die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung voraussetzt: Denn dann ist die Anzahl der Faktoren auf der linken Seite ungerade und auf der rechten Seite gerade.
Bei allen diesen Varianten wird wesentlich eine Paritätsüberlegung verwendet. Dass bei jeder Quadratzahl (in jedem Stellenwertsystem mit einer Primzahl oder einem Primzahlprodukt als Basis) die Anzahl der abschließenden Nullen gerade ist, liegt auch der Argumentation zugrunde, die mir Wolfgang Mückenheim mitgeteilt hat: Da im Binärsystems (wie auch im Dezimalsystem) jede Quadratzahl mit einer geraden Anzahl von Nullen endet und im Binärsystem Multiplikation mit 2 das Anfügen einer 0 bedeutet, haben wir in der Gleichung $2 \cdot q^2 = p^2$ links eine ungerade Anzahl von Nullen, rechts eine gerade.

2.2 Zu Idee und Quelle der Beweisalternative

Der alternative Beweis verwendet einr für das Lösen von Aufgaben in mathematischen Wettbewerben wichtigen Grundprinzip, nmlich das Extremalprinzip; es verwundert daher nicht, dass die Quelle das Buch *Problem Solving Strategies* von Arthur Engel ist.

2.3 Der andere Beweis

Angenommen, $\sqrt{2}$ ist eine rationale Zahl. Dann gibt es eine positive ganze Zahl n, für welche $n \cdot \sqrt{2}$ ganzzahlig ist. Nun sei dieses n minimal gewählt - hier wird verwendet, dass die natürlichen Zahlen wohlgeordnet sind, also jede ihrer nicht leeren Teilmengen ein kleinstes Element hat.
Man betrachte nun die natürliche Zahl m mit $m = n \cdot (\sqrt{2} - 1)$. Dann hat man

$$m \cdot \sqrt{2} = n \cdot (\sqrt{2} - 1) \cdot \sqrt{2} = 2n - n \cdot \sqrt{2}.$$

Nach Definition von n ist $2n - n \cdot \sqrt{2}$, also auch $m \cdot \sqrt{2}$ ganzzahlig. Das ist aber wegen

$$m = n \cdot (\sqrt{2} - 1) < n$$

ein Widerspruch zur Minimalität von n.

3 Der Nullstellensatz für stetige Funktionen

3.1 Bemerkungen zum Satz und seinem Standardbeweis

Der Nullstellensatz ist ein Spezialfall des Zwischenwertsatzes, der besagt, dass das Bild eines Intervalls bei einer stetigen Funktion wieder ein Intervall ist. Umgekehrt folgt dieser Zwischenwertsatz sofort aus dem Nullstellensatz, der häufig in der folgenden Weise formuliert wird:
Nimmt eine auf einem abgeschlossenen Intervall $[a; b]$ definierte und dort stetige Funktion f an den Intervallenden Werte mit unterschiedlichen Vorzeichen an, so hat sie im Intervall mindestens eine Nullstelle.
Alle Beweise müssen auf Eigenschaften der reellen Zahlen zurückgreifen, da der Nullstellensatz in der Menge der rationalen Zahlen nicht gilt, wie zum Beispiel die durch $f(x) = 2 - x^2$ definierte Funktion f zeigt.

Dabei wird die Vollständigkeit der reellen Zahlen ausgenutzt, indem entweder eine Intervallschachtelung um die Nullstelle konstruiert wird oder ein geeignetes Supremum gebildet wird.
Der nachfolgende Beweis reduziert die Behauptung auf den Satz, dass jede auf einem Intervall $[a;b]$ definierte stetige Funktion f mit $f(a) \cdot f(b) \leq 0$ mit $f([a;b]) \subset \{-1,1\}$ konstant ist.
Damit ist der Beweis zwar noch nicht abgeschlossen, denn dieser allenfalls intuitiv als richtig erkannte Satz bedarf natürlich auch noch eines Beweises, der die Eigenschaften der reellen Zahlen ausnutzt; schießlich ist z.B. die durch

$$\bigwedge_{x\in\mathbb{Q}_+} f(x) = \operatorname{sgn}(x^2 - 2)$$

auf der Menge der positiven rationalen Zahlen definierte Funktion f stetig mit der Wertmenge $\{-1;1\}$.

3.2 Reduktion des Nullstellensatzes

Vorgegeben sei sei eine auf $[a;b]$ stetige reelle Funktion f mit $f(a) < 0, \quad f(b) > 0$. Die Annahme, dass f keine Nullstelle hat, wird zum Widerspruch geführt, indem man die durch

$$\bigwedge_{x\in[a;b]} h(x) = \frac{f(x)}{|f(x)|}$$

definierte Funktion h betrachtet. Diese ist nach den entsprechenden Stetigkeitsregeln stetig und hat die Wertemenge $\{-1;1\}$.

4 Der verallgemeinerte Mittelwertsatz der Differentialrechnung

4.1 Bemerkungen zum Satz und seinem Standardbeweis

Der Mittelwertsatz der Analysis beinhaltet die sehr anschauliche Aussage, dass für eine auf einem abgeschlossenen Intervall definierte, am Rand stetige und im Inneren differenzierbare Funktion stets eine Tangente gibt, die zu der Sekante durch die Endpunkte des Graphen parallel verläuft. (Satz von Rolle mit schiefem Kopf betrachtet ;-).
Der Satz ist in verschiedenen Richtungen zu verallgemeinern, eine der Verallgemeinerungen führt (z.B. über eine Verallgemeinerung des Satzes von Rolle) zum Satz von Taylor. In dieser Zusammenstellung wird die - z.B. für die Herleitung der Regel von *de-L'Hospital* verwendete - Verallgemeinerung auf zwei Funktionen betrachtet:
Sind die Funktionen f und g auf einem Intervall $[a;b]$ stetig, im Inneren differenzierbar, und hat g' in $]a;b[$ keine Nullstelle, so gibt eine Stelle $\xi \in]a;b[$ mit der Eigenschaft $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.
Der Beweis erfolgt durch Konstruktion einer geeigneten Hilfsfunktion, welche die Voraussetzungen des Satzes von Rolle erfüllt. Die Anwendung dieses Satzes auf die Hilfsfunktion liefert dann die gewünschte Aussage des verallgemeinerten Mittelwertsatzes.
Die nachfolgend angegebene Version ist eigentlich nur eine andere Schreibweise des bekannten Beweises; sie verkürzt aber die Rechnung und macht den Beweis übersichtlicher.

4.2 Notationsvariante zum Beweis des verallgemeinerten Mittelwertsatzes

Unter den oben angegebenen Voraussetzungen für die Funktionen f und g erfüllt die durch

$$\bigwedge_{x\in[a;b]} h(x) = \begin{vmatrix} f(x) & f(b) & f(a) \\ g(x) & g(b) & g(a) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

definierte Funktion h offensichtlich die Voraussetzungen des Satzes von Rolle. Als Ableitung erhält man bei Entwicklung der Determinante nach der ersten Spalte

$$h'(x) = f'(x) \cdot (g(b) - g(a)) - g'(x) \cdot (f(b) - f(a)),$$

so dass für die nach dem Satz von Rolle existierende Nullstelle ξ von h' gilt $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

5 Der binomische Satz

Unter dem binomischen Satz versteht man die Formel

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i \cdot b^{n-i}$$

Dabei sind a und b beliebige reelle Zahlen, n ist eine natürliche Zahl.

5.1 Bemerkung zu zwei Standardbeweisen

Der naheliegende Standardbeweis durch vollständige Induktion verwendet, dass die Aussage für $n = 0$ offensichtlich richtig ist und der Schluss von n auf $n+1$ mit Hilfe des Additionstheorems der Binomialkoeffizienten erfolgen kann.
Ein kombinatorischer Beweis ergibt sich unmittelbar durch die folgende Überlegung:
Bei der Multiplikation der n Faktoren $(a+b)$ entstehen jeweils Produkte der Form $a^i \cdot b^{n-i}$, wenn aus genau i Faktoren der Summand a und somit aus den restlichen $n-i$ Faktoren der Summand b gewählt wird. Da es hierfür genau $\binom{n}{i}$ Möglichkeiten gibt, tritt der Summand $a^i \cdot b^{n-i}$ beim Ausmultiplizieren genau $\binom{n}{i}$ mal auf.

5.2 Alternativbeweis mit Hilfe des Taylorpolynoms

Eine einfache Folgerung aus dem Satz von Taylor ergibt, dass jedes Polynom n-ten Grades sein eigenes Taylorpolynom ist, da das Restglied als Faktor die $(n+1)$-te Ableitung enthält und daher verschwindet.
Betrachtet man nun für eine natürliche Zahl n die durch

$$\bigwedge_{x\in\mathbb{R}} f(x) = (x+1)^n$$

definierte Funktion mit den Ableitungen

$$\bigwedge_{i\in\{0,1,2,\ldots,n\}} \bigwedge_{x\in\mathbb{R}} f^{(i)}(x) = n \cdot (n-1) \cdots (n-i+1) \cdot (x+1)^{n-i} = \frac{n!}{(n-i)!} x^{n-i},$$

so erhält man für jedes $x \in \{0,1,2,\ldots,n\}$: $\quad f^{(i)}(0) = \frac{n!}{(n-i)!}$ und daher

$$\bigwedge_{x\in\mathbb{R}} f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i = \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{(n-i)! \cdot i!} x^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{n-i} x^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i.$$

Setzt man nun $x := \frac{a}{b}$, wobei a, b beliebige reelle Zahlen $(b \neq 0)$ sind, so ergibt sich

$$(\frac{a}{b}+1)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (\frac{a}{b})^i,$$

also nach Multiplikation mit b^n

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i \cdot b^{n-i}.$$

Dabei darf - wie Einsetzen zeigt - b auch verschwinden, so dass der binomische Satz allgemein für beliebige reelle Zahlen a, b gilt.

(Letzte Bearbeitung 2012-10-08)