Übungsbeispiel zum Approximationssatz für Funktionenräume

Es sei **V** der Vektorraum der Gesamtheit der stetigen Funktionen über dem Intervall [-1; 1] mit dem Skalarprodukt $*$, definiert für f, g ϵ **V** als halber Wert des Integrals von f·g über [-1; 1]. Weiterhin sei **U** die lineare Hülle von $\{ \mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \}$.
<u>Aufgabe:</u> Approximiere **exp** aus **U** heraus.

Für die benötigten Skalarprodukte von **exp** mit $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ erhält man:

$$\mathbf{exp} * \mathbf{p}_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^t dt = \frac{1}{2}[e^t]_{-1}^{1} = \frac{1}{2}(e - e^{-1});\ \mathbf{exp} * \mathbf{p}_1 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} te^t dt = \frac{1}{2}[(t-1)e^t]_{-1}^{1} = e^{-1}$$

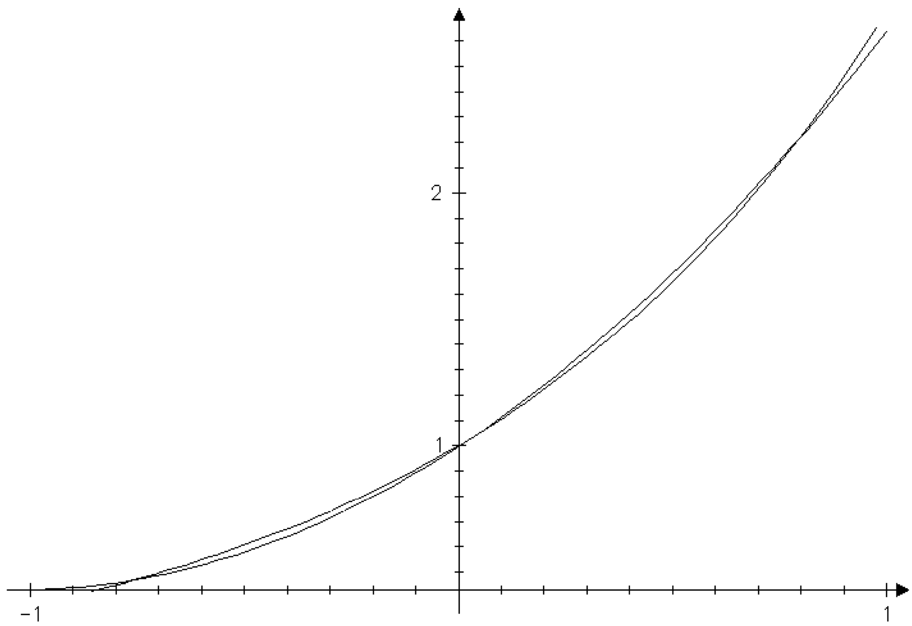
$$\mathbf{exp} * \mathbf{p}_2 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} t^2e^t dt = \frac{1}{2}[(t^2-2t+2)e^t]_{-1}^{1} = \frac{1}{2}(e - 5e^{-1})$$

Bezeichnet man die approximierende Funktion mit g und ist $\{ \mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \}$ eine ONB von **U**, so ergibt sich nach dem Approximationssatz die Funktion g auf folgende Weise, wobei die Ergebnisse aus dem Übungsbeispiel zum Orthonormieren verwendet werden:

$$\begin{aligned}
\mathbf{g} &= (\mathbf{exp} * \mathbf{b}_0)\mathbf{b}_0 + (\mathbf{exp} * \mathbf{b}_1)\mathbf{b}_1 + (\mathbf{exp} * \mathbf{b}_2)\mathbf{b}_2 \\
&= (\mathbf{exp} * \mathbf{p}_0)\mathbf{p}_0 + (\mathbf{exp} * \sqrt{3}\mathbf{p}_1)\sqrt{3}\mathbf{p}_1 + \left(\mathbf{exp} * \frac{3}{2}\sqrt{5}(\mathbf{p}_2 - \frac{1}{3}\mathbf{p}_0)\right)\left(\frac{3}{2}\sqrt{5}(\mathbf{p}_2 - \frac{1}{3}\mathbf{p}_0)\right) \\
&= \frac{1}{2}(e - e^{-1})\mathbf{p}_0 + 3e^{-1}\mathbf{p}_1 + \frac{45}{4}(\mathbf{exp} * \mathbf{p}_2 - \frac{1}{3}\mathbf{exp} * \mathbf{p}_0)\,(\mathbf{p}_2 - \frac{1}{3}\mathbf{p}_0) \\
&= \frac{1}{2}(e - e^{-1})\mathbf{p}_0 + 3e^{-1}\mathbf{p}_1 + \frac{45}{4}(\frac{e}{2} - \frac{5}{2}e^{-1} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}(e - e^{-1})\,(\mathbf{p}_2 - \frac{1}{3}\mathbf{p}_0) \\
&= \frac{1}{2}(e - e^{-1})\mathbf{p}_0 + 3e^{-1}\mathbf{p}_1 + \frac{45}{4}(\frac{e}{3} - \frac{7}{3}e^{-1})\,(\mathbf{p}_2 - \frac{1}{3}\mathbf{p}_0) \\
&= \frac{1}{2}(e - e^{-1})\mathbf{p}_0 + 3e^{-1}\mathbf{p}_1 + (\frac{15}{4}e - \frac{105}{4}e^{-1})\,(\mathbf{p}_2 - \frac{1}{3}\mathbf{p}_0) \\
&= (\frac{1}{2}e - \frac{1}{2}e^{-1} - \frac{5}{4}e + \frac{35}{4}e^{-1})\mathbf{p}_0 + 3e^{-1}\mathbf{p}_1 + (\frac{15}{4}e - \frac{105}{4}e^{-1})\mathbf{p}_2 \\
&= (-\frac{3}{4}e + \frac{33}{4}e^{-1})\mathbf{p}_0 + 3e^{-1}\mathbf{p}_1 + (\frac{15}{4}e - \frac{105}{4}e^{-1})\mathbf{p}_2 \\
&= \frac{3}{4e}((-e^2 + 11)\mathbf{p}_0 + 4\mathbf{p}_1 + (5e^2 - 35e)\mathbf{p}_2).
\end{aligned}$$

Für die Graphen der beiden Funktionen **exp** und **g** ergibt sich die rechts skizzierte Darstellung.

$$\mathbf{g}(x) \approx 0{,}99629 + 1{,}10364\,x + 0{,}53672\,x^2.$$



LÖ, 2003-02-15