Differenzierbarkeit

Klaus-R. Loeffler

Inhaltsverzeichnis

1 Hinführung, Definition und unmittelbare Folgerungen **1**
1.1 Hinführung . . . 1
1.2 Definition der Differenzierbarkeit . . . 2
1.3 Folgerungen . . . 3
1.3.1 Tangentengleichung . . . 3
1.3.2 Zusammenhang zwischen Stetigkeit und Differenzierbarkeit . . . 3
1.3.3 Lokaler Wachstumssatz . . . 3
1.3.4 Notwendige Bedingung für ein lokales Maximum . . . 4

2 Ableitungsregeln **4**
2.1 Ableitungsbeispiele . . . 4
2.2 Ableitung einer Integralfunktion . . . 5
2.3 Faktorregel . . . 5
2.4 Summenregel . . . 5
2.5 Produktregel . . . 6
2.6 Potenzregel . . . 6
2.7 Kettenregel . . . 6
2.8 Reziprokenregel . . . 7
2.9 Quotientenregel . . . 7
2.10 Ableitung der Umkehrfunktion . . . 7
2.11 Tabelle der wichtigsten Ableitungen . . . 7

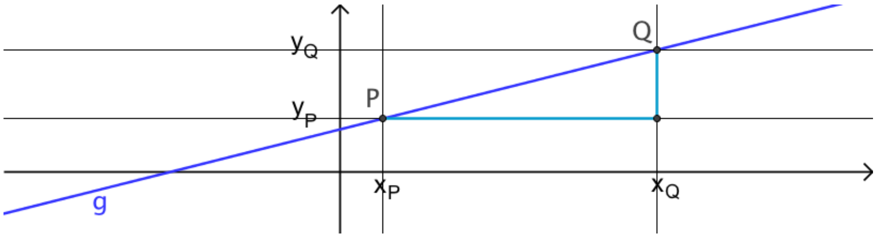
3 Eigenschaften differenzierbarer Funktionen **8**
3.1 Mittelwertsatz der Differentialrechnung . . . 8
3.1.1 Mittelwertsatz . . . 8
3.1.2 Verallgemeinerter Mittelwertsatz . . . 9
3.2 Folgerungen aus dem Mittelwertsatz . . . 9
3.2.1 $f' = o \quad \Rightarrow \quad f$ ist konstant . . . 9
3.2.2 Globaler Wachstumssatz . . . 9
3.2.3 Fixpunktsatz für differenzierbare Funktionen . . . 10
3.3 Zwischenwertsatz für Ableitungen . . . 10

1 Hinführung, Definition und unmittelbare Folgerungen

1.1 Hinführung

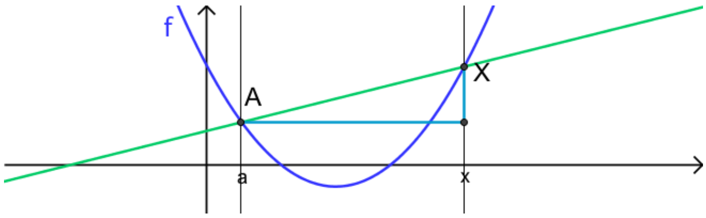
Die Steigung m einer Geraden g gibt an, wie steil bzw. flach eine Gerade verläuft und ob sie steigt oder fällt. Bei einer Ursprungsgeraden ist das die zweite Koordinate des Punktes $P(1|y_P)$ auf der Geraden.

Allgemein hat die Gerade g durch zwei nicht auf einer Parallelen zur y-Achse liegenden Punkte P und Q die Steigung $m_g = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}$.



Will man bei einem nicht geradelinigen Kurvenverlauf die Steigung beschreiben, so kann man das näherungsweise mithilfe von Sekanten tun: Will man einen Näherungswert für die Steigung des Graphen einer Funktion f an einer Stelle a erhalten, legt man eine Sekante durch den Kurvenpunkt $A(a|f(a))$ und einen davon verschiedenen Kurvenpunkt $X(x|f(x))$ und berechnet die Steigung der Strecke AX.

$$m_{AX} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$



Allerdings entspricht die so ermittelte Durchschnittssteigung des Graphen von f über dem Intervall $[a; x]$ (bzw. $[x; a]$, falls x kleiner als a ist) anschaulich nur dann näherungsweise der Steigung des Graphen von f bei a, wenn $|x - a|$ klein genug ist. So ergibt sich im skizzierten Beispiel als Steigung von AX eine positive Zahl, während ganz offensichtlich der Graph von f durch den Punkt A nicht steigt, sondern fällt.
Man möchte die Steigung an der Stelle a zu einer vorgegebenen Fehlerschranke ε durch einen Wert beschreiben, der sich auch bei noch größerer Annäherung der Stelle a durch die Stelle x von der zugehörigen Durchschnittssteigung um weniger als ε unterscheidet.
Diese Forderung erfüllt - falls er existiert - der Grenzwert der Durchschnittsteigungsfunktion g_a an der Stelle a:

$$g_a : A_f \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ mit } g_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Dies führt zu folgender Definition der Differenzierbarkeit:

1.2 Definition der Differenzierbarkeit

Eine Funktion f heißt *differenzierbar* an der Stelle c ihrer Argumengmenge A, wenn die durch $g(x) = \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ über $A \setminus \{c\}$ definierte Funktion g an der Stelle c einen Grenzwert hat, also formaler:

$$c \in A \subset \mathbb{R}; \quad f : A \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f \text{ differenzierbar bei } c :\Longleftrightarrow \bigvee_{\lambda \in \mathbb{R}} \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lambda$$

Falls dieser Grenzwert λ existiert, wird er als *Ableitung von f an der Stelle c* bezeichnet und als $f'(c)$ notiert. Damit wird auf der Menge aller Stellen von A, an denen f differenzierbar ist, eine Funktion f' definiert.

1.3 Folgerungen

1.3.1 Tangentengleichung

Die Gerade mit der Steigung m, die durch den Punkt P verläuft, hat bekanntlich die Gleichung $y = y_P + m \cdot (x - x_P)$.
Die im Punkte P mit den Koordinaten $(c|f(c))$ an den Graphen von f angelegte Tangente hat die Steigung $f'(c)$ und daher die Gleichung $y = f(c) + f'(c) \cdot (x - c)$.

1.3.2 Zusammenhang zwischen Stetigkeit und Differenzierbarkeit

(1) Aus Differenzierbarkeit folgt Stetigkeit

Zu zeigen ist, dass aus $\lim_{x\to c}\left(\frac{f(x)-f(c)}{x-c} - f'(c)\right) = 0$ folgt $\lim_{x\to c}(f(x) - f(c)) = 0$. Dies ergibt wegen

$$f(x) - f(c) = \left(\frac{f(x) - f(c)}{x - c} - f'(c)\right)(x - c) + f'(x) \cdot (x - c) \longrightarrow 0 \quad (\text{für } x \to c)$$

(2) Aus Stetigkeit folgt <u>nicht</u> Differenzierbarkeit

Dies wird durch Beispiel einer Funktion gezeigt, die an der Stelle 0 zwar stetig, aber nicht differenzierbar ist:

Durch

$$\bigwedge_{x\in\mathbb{R}^*} f(x) := x \cdot \sin(\frac{1}{x}) \quad \wedge \quad f(0) = 0$$

wird eine auf ganz $\mathbb{R}$ stetige Funktion definiert, da das Produkt einer bei 0 gegen 0 konvergenten Funktion mit einer in einer Umgebung von 0 beschränkten Funktion bei 0 den Grenzwert 0 hat. Aber die Durchschnittssteigung über dem Intervall $[0; x]$, also $\sin(\frac{1}{x})$ nimmt in jeder Umgebung von 0 die Werte 0 und 1 an (nämlich bei $x = \frac{n}{\pi}$ bzw. $x = \frac{2}{\pi(1+4n}; n \in \mathbb{N}$), hat also an der Stelle 0 keinen Grenzwert.

1.3.3 Lokaler Wachstumssatz

Ist eine Funktion f mit Argumentmenge A an einer Stelle $c \in A$ differenzierbar, und ist die Ableitung dort positiv, so gibt es ein offenes Intervall I um die Stelle c, für das folgendes gilt:

$$\bigwedge_{x,y\in I\cap A} (x < c < y \Rightarrow f(x) < f(c) < f(y))$$

Denn nach dem Positivitätssatz für Grenzwerte folgt aus $\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c} > 0$, dass es ein offenes Intervall I um c gibt mit

$$\bigwedge_{x\in I\cap A\setminus\{c\}} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0.$$

Für alle $x \in I \cap A \setminus \{c\}$ sind daher $f(x) - f(c)$ und $x - c$ vorzeichengleich. Daher gilt

$$\bigwedge_{x,y\in I\cap A} (x < c \Rightarrow f(x) < f(c)) \quad \wedge \quad (y > c \Rightarrow f(y) > f(c)).$$

1.3.4 Notwendige Bedingung für ein lokales Maximum

Eine Funktion f mit der Argumentmenge A hat genau dann an einer Stelle $c \in A$ ein lokales Maximum, wenn es ein offenes Intervall I um c gibt, in dem die Funktion an keiner Stelle einen größeren Wert als $f(c)$ annimmt:

$$f \text{ hat bei } c \text{ ein lokales Maximum } :\Leftrightarrow \bigvee_{\delta \in \mathbb{R}_+} \bigwedge_{x \in A} (|x-c| < \delta \Rightarrow f(x) \leq f(c))$$

Wäre die Ableitung von f an einer Stelle c mit einem lokalen Maximum verschieden von 0, so müsste c ein Randpunkt der Argumentmenge sein, da sonst nach dem lokalen Wachstumssatz in jedem offenen Intervall um c auch größere Werte als $f(c)$ angenommen würden. Daher gilt die folgende notwendige Bedingung für das Vorliegen eines lokalen Maximums:
Ist c innerer Punkt der Argumentmenge A einer bei c differenzierbaren Funktion f, und hat f bei c ein lokales Maximum, so gilt $f'(c) = 0$.

2 Ableitungsregeln

Der Nachweis der Differenzierbarkeit an einer Stelle und die Berechnung der Ableitung $f'(c)$ verfahren nach folgendem Schema

1. Notieren des Terms $\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ für die mittlere Steigung über dem Intervall $[c;x]$ (bzw. $[x;c]$), des sog. *Differenzenquotienten*. Da der Nenner und (bei Stetigkeit von f an der Stelle c) der Zähler beide bei c den Grenzwert 0 haben, lässt sich ohne weitere Umformung noch keine Aussage über die Differenzierbarkeit machen.

2. Algebraische Umformung des Differenzenquotienten zu einem oder mehreren Operanden, für die jeweils ein Grenzwert an der Stelle c zu erkennen ist.

Anstelle des oben angegebenen Differenzenquotienten $\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ kann man auch den durch Substitution mit $x = c+h$ entstehenden Ausdruck $\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$ betrachten. Er hat genau dann bei 0 einen Grenzwert, wenn die Funktion f bei c differenzierbar ist, und dieser Grenzwert ist die Ableitung $f'(c)$.

2.1 Ableitungsbeispiele

- Eine konstante Funktion f ist an jeder Stelle c differenzierbar; $f'(c) = 0$.

  Denn wenn k die reelle Zahl ist, die von f an jeder Stelle als Wert angenommen wird, so gilt:

  $$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \frac{k-k}{x-c} = 0 \to 0 \quad \text{für } x \to c.$$

- Die identische Funktion f, die an jeder Stelle x den Wert x annimmt ist an jeder Stelle c differenzierbar; $f'(c) = 1$, denn

  $$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \frac{x-c}{x-c} = 1 \to 1 \quad \text{für } x \to c.$$

- Die Kehrwertfunktion f, die an jeder Stelle $x \in \mathbb{R}^*$ den Wert $\frac{1}{x}$ annimmt, ist an jeder Stelle $c \in \mathbb{R}^*$ differenzierbar; $f'(c) = -\frac{1}{c^2}$, denn

  $$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{c}}{x-c} = \frac{c-x}{xc(x-c)} = \frac{-1}{xc} \to -\frac{1}{c^2} \quad \text{für } x \to c.$$

- Die Wurzelfunktion f, die an jeder Stelle $x \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ den Wert $\sqrt{x}$ annimmt, ist an jeder Stelle $c \in \mathbb{R}_+$ differenzierbar; $f'(c) = \frac{1}{2\cdot\sqrt{c}}$, denn

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{c}}{x-c} = \frac{x-c}{(\sqrt{x}+\sqrt{c})(x-c)} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{c}} \to \frac{1}{2\cdot\sqrt{c}} \quad \text{für } x \to c.$$

2.2 Ableitung einer Integralfunktion

Ist f eine auf einem Intervall $[a;b]$ definierte, integrierbare Funktion, dann erklärt man bekanntlich die zugehörige Integralfunktion F durch

$$F : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}; \bigwedge_{x\in[a;b]} F(x) := \int_a^x f(t)\mathrm{d}t.$$

Die Integralfunktion ist zwar überall stetig, aber nicht notwendigerweise differenzierbar.
Ist allerdings der Integrand f an einer Stelle c stetig, dann ist F bei c differenzierbar und hat dort die Ableitung $f(c)$, wie nachfolgend gezeigt wird.

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(x)-F(c)}{x-c} - f(c)\right| &= \left|\frac{\int_a^x f(t)\mathrm{d}t - \int_a^c f(t)\mathrm{d}t}{x-c} - \frac{\int_c^x f(c)\mathrm{d}t}{x-c}\right| = \left|\frac{\int_c^x f(t)\mathrm{d}t - \int_c^x f(c)}{x-c}\right| \\ = \left|\frac{\int_c^x (f(t)-f(c))\mathrm{d}t}{x-c}\right| &\le \left|\frac{\int_c^x |f(t)-f(c)|\mathrm{d}t}{x-c}\right| \le \frac{|x-c|\cdot\sup\{|f(t)-f(c)| \mid t\in[x;c]\cup[c;x]\}}{|x-c|} \\ &= \sup\{|f(t)-f(c)| \mid t \in [x;c]\cup[c;x]\} \to 0 \quad \text{für } x \to c.\end{aligned}$$

Beispiel: Der natürliche Logarithmus $\ln(x)$ einer positiven, reellen Zahl x kann auf folgende Weise definiert werden

$$\bigwedge_{x\in\mathbb{R}_+} \ln(x) := \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Als Integralfunktion mit stetigem Integranden ist ln überall differenzierbar; $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

2.3 Faktorregel

Ist f eine an einer Stelle c differenzierbare Funktion, k eine reelle Zahl, dann ist $k\cdot f$ bei c differenzierbar; $(k\cdot f)'(c) = k\cdot f'(c)$, denn

$$\frac{(k\cdot f)(x)-(k\cdot f)(c)}{x-c} = \frac{k\cdot f(x)-k\cdot f(c)}{x-c} = k\cdot\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \to k\cdot f'(c) \quad \text{für } x\to c.$$

2.4 Summenregel

Sind die Funktionen f und g bei c differenzierbar, dann ist auch die Summe $f+g$ bei c differenzierbar; $(f+g)'(c) = f'(c)+g'(c)$, denn

$$\begin{aligned}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(c)}{x-c} &= \frac{f(x)+g(x)-(f(c)+g(c))}{x-c} = \frac{f(x)-f(c)+g(x)-g(c)}{x-c} \\ &= \frac{f(x)-f(c)}{x-c} + \frac{g(x)-g(c)}{x-c} \to f'(c)+g'(c) \quad \text{für } x\to c.\end{aligned}$$

2.5 Produktregel

Sind die Funktionen f und g bei c differenzierbar, dann ist auch das Produkt $f \cdot g$ bei c differenzierbar; $(f \cdot g)'(c) = f'(c) \cdot g(c) + f(c) \cdot g'(c)$, denn

$$\begin{aligned}\frac{(f\cdot g)(x)-(f\cdot g)(c)}{x-c} &= \frac{f(x)\cdot g(x)-f(c)\cdot g(c))}{x-c} = \frac{(f(x)-f(c))\cdot g(x)+f(c)\cdot(g(x)-g(c))}{x-c}\\ &= \frac{f(x)-f(c)}{x-c}\cdot g(x)+f(c)\cdot\frac{g(x)-g(c)}{x-c} \to f'(c)\cdot g(c)+f(c)\cdot g'(c) \quad \text{für } x\to c.\end{aligned}$$

2.6 Potenzregel

Aus der Produktregel ergibt sich durch vollständige Induktion: Ist n eine positive ganze Zahl, und ist die Funktionen f bei c differenzierbar, dann ist auch die Funktion f^n an der Stelle c differenzierbar; $(f^n)'(c) = n \cdot f^{n-1}(c) \cdot f'(c)$.

2.7 Kettenregel

Gehört für eine durch Verkettung entstandene Funktion $g \circ f$ die Stelle c zum Differenzierbarkeitsbereich von f, die Stelle $f(c)$ zum Differenzierbarkeitsbereich von g, dann ist die Funktion $g \circ f$ bei c differenzierbar; $(g \circ f)'(c) = g'(f(c)) \cdot f'(c)$.
Der Nachweis wird zunächst für den Fall $f'(c) \neq 0$ geführt; in diesem Fall sind nach dem lokalen Wachstumssatz in einer geeigneten Umgebung von c alle Funktionswerte $f(x)$ für $x \neq c$ verschieden von $f(c)$.

$$\begin{aligned}\frac{(g\circ f)(x)-(g\circ f)(c)}{x-c} = \frac{g(f(x))-g(f(c))}{x-c} &= \frac{g(f(x))-g(f(c))}{f(x)-f(c)}\cdot\frac{g(x)-g(c)}{x-c}\\ &\to g'(f(c))\cdot f'(c) \quad \text{für } x\to c.\end{aligned}$$

Zu zeigen ist noch, dass $g \circ f$ auch im Falle $f'(c) = 0$ bei c differenzierbar ist und dort die Ableitung 0 hat.
Aufgrund der Differenzierbarkeitsvoraussetzungen für g bei $f(c)$ und für f bei c haben die folgenden beiden Funktionen γ und ϕ bei 0 den Grenzwert 0:

$$\gamma(t) := \frac{g(f(c)+t)-g(f(c))}{t} - g'(f(c)); \quad \phi(h) := \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

Umformung ergibt

$$g(f(c)+t) = g(f(c)) + (\gamma(t)+g'(f(c)))\cdot t; \quad f(c+h) = f(c) + h\cdot\phi(h)$$

und somit

$$g(f(c+h)) = g(f(c)+h\cdot\phi(h)) = g(f(c)) + (\gamma(h\cdot\phi(h)) + g'(f(c)))\cdot h\cdot\phi(h).$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}\frac{g(f(c+h))-g(f(c))}{h} &= \frac{(\gamma(h\cdot\phi(h))+g'(f(c)))\cdot h\cdot\phi(h)}{h}\\ &= \gamma(h\cdot\phi(h)) + g'(f(c)))\cdot\phi(h) \to 0 \quad \text{für } h\to 0.\end{aligned}$$

2.8 Reziprokenregel

Ist die Funktion f an der Stelle c differenzierbar, und ist $f(c) \neq 0$, dann ist auch $\frac{1}{f}$ bei c differenzierbar; $(\frac{1}{f})'(c) = -\frac{f'}{f^2}(c)$, denn da f stetig ist, sind wegen $f(c) \neq 0$ alle Funktionswerte $f(x)$ in einer geeigneten Umgebung von c verschieden von null. Bezeichnet man die Kehrwertfunktion mit g, so ist $\frac{1}{f} = g \circ f$. Nach der Kettenregel ist $\frac{1}{f}$ also bei c differenzierbar:

$$(\frac{1}{f})'(c) = (g \circ f)'(c) = g'(f(c)) \cdot f'(c) = -\frac{1}{f^2(c)} \cdot f'(c)$$

2.9 Quotientenregel

Sind die Funktionen f und g an der Stelle c differenzierbar, und ist $g(c) \neq 0$ (und damit $g(x) \neq 0$ in einer geeigneten Umgebung von c), dann ist $\frac{f}{g}(= f \cdot \frac{1}{g})$ nach der Produktregel bei c differenzierbar. Man erhält

$$(\tfrac{f}{g})'(c) = (f \cdot \tfrac{1}{g})'(c) = f'(c) \cdot (\tfrac{1}{g})(c) + f(c) \cdot (\tfrac{1}{g})'(c) = \tfrac{f'(c)}{g(c)} + f(c) \cdot \tfrac{-g'(c)}{g^2(c)} = \tfrac{f'(c) \cdot g(c) - f(c) \cdot g'(c)}{g^2(c)}$$

2.10 Ableitung der Umkehrfunktion

Ist die Funktion f streng monoton über einem Intervall um c und differenzierbar bei c mit $f'(c) \neq 0$, dann ist die Umkehrfunktion f^{-1} differenzierbar bei $f(c)$, und es gilt $(f^{-1})'(f(c)) = \frac{1}{f'(c)}$.

$$\frac{f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(c))}{f(x) - f(c)} = \frac{x - c}{f(x) - f(c)} = \frac{1}{\frac{f(x)-f(c)}{x-c}} \to \frac{1}{f'(c)} \quad \text{für } x \to c.$$

Ergänzende Bemerkungen:

- Die Voraussetzung $f'(c) \neq 0$ ist nicht bereits durch die strenge Monotonie von f gesichert, wie z.B. die Potenzfunktion dritten Grades (für $c = 0$) zeigt.
- Da f bei c stetig ist, gilt $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$; nach dem lokalen Wachstumssatz sind für x aus einer geeigneten Umgebung von c $\quad (x \neq c)$ die Funktionswerte $f(x)$ verschieden von $f(c)$. Wenn also $\frac{f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(c))}{f(x)-f(c)}$ an der Stelle $f(c)$ einen Grenzwert hat, dann folgt daraus die behauptete Differenzierbarkeit bei $f(c)$, und der Grenzwert ist die gesuchte Ableitung.
- Setzt man bereits voraus, dass die Umkehrfunktion f^{-1} bei $f(c)$ differenzierbar ist, dann ist die Ableitung mithilfe der Kettenregel und der Ableitung der identischen Funktion einfach zu berechnen:

$$\bigwedge_x (f^{-1} \circ f)(x) = x \Longrightarrow (f^{-1})'(f(c)) \cdot f'(c) = 1 \qquad \text{und daher} \quad (f^{-1})'(f(c)) = \frac{1}{f'(c)}.$$

2.11 Tabelle der wichtigsten Ableitungen

Funktion	f	$k \cdot f$	$f + g$	$f \cdot g$	$\frac{f}{g}$	$g \circ f$	f^{-1}
Ableitung	f'	$k \cdot f'$	$f' + g'$	$f' \cdot g + f \cdot g'$	$\frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$	$(g' \circ f) \cdot f'$	$\frac{1}{f'}$

Außerdem gilt für spezielle Funktionen mit

$$p_n(x) := x^n, \quad r(x) = \frac{1}{x}, \quad w(x) := \sqrt{x}; \quad \exp(x) := e^x :$$

Funktion	p_n	r	w	exp	ln	sin	cos	tan	sinh	cosh
Ableitung	$n \cdot p_{n-1}$	$-\frac{r'}{r^2}$	$\frac{1}{2 \cdot w}$	exp	r	cos	sin	$\frac{1}{\tan^2}$	cosh	sinh

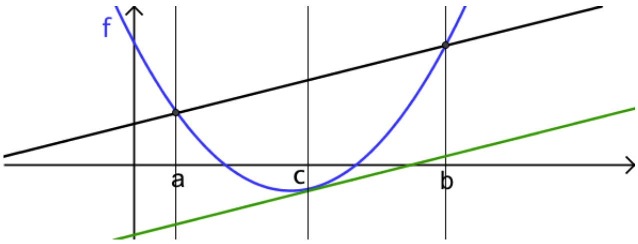
3 Eigenschaften differenzierbarer Funktionen

Eine Funktion heißt differenzierbar, wenn sie an jeder Stelle ihrer Argumentmenge differenzierbar ist.

3.1 Mittelwertsatz der Differentialrechnung

3.1.1 Mittelwertsatz

Ist f eine auf einem abgeschlossenen Intervall $[a;b]$ stetige und im Inneren des Intervalls differenzierbare Funktion, dann gibt es im Inneren des Intervalls eine Stelle c , an der die zugehörige Tangente parallel zur Sekante durch die Punkte $(a|f(a)$ und $b|f(b)$ verläuft.



$$f:[a;b]\longrightarrow\mathbb{R},\text{stetig, auf }]a;b[\text{ differenzierbar}\Longrightarrow\bigvee_{c\in]a;b[}\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

Der Beweis wird im Anschluss an eine Reduktion auf einen Spezialfall durchgeführt.

1. Reduktion auf den Spezialfall $f(a)=f(b)=0$

   Definiert man die Hilfsfunktion h durch

   $$(1)\qquad\bigwedge_{x\in[a;b]}h(x):=f(x)-f(a)\cdot\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(x-a),$$

   also als Differenz von f und der linearen Funktion, deren Graph die betrachtete Sekante ist, dann ist h differenzierbar und hat an den Stellen a und b den Wert 0. Gilt also der Mittelwertsatz in der reduzierten Form, dann gibt es im Intervall $]a;b[$ eine Stelle c mit $h'(c)=0$; wegen $h'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ergibt sich daraus die allgemeine Beahuptung des Mittelwertsatzes.

2. Nachweis der reduzierten Behauptung (Satz von Rolle)

   Als stetige Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall hat f dort Minimum und Maximum. Werden beide am Rand angenommen ist die Funktion wegen $f(a)=f(b)$ konstant, hat also (z.B.) an der Stelle $c=\frac{a+b}{2}$ die Ableitung 0.

   Wird aber Minimum oder Maximum an einer Stelle c aus $]a;b[$ angenommen, so folgt aus dem lokalen Wachstumssatz, dass $f'(c)=0$ gelten muss.

3. Modifikation der Behauptung

   Durch Multiplikation der Gleichung in (1) mit $b-a$ und Addition von $f(a)$ erhält die Aussage des Mittelwertsatzes die Form $\bigvee_{c\in]a;b[}f(b)=f(a)+f'(c)\cdot(b-a)$.

Die (anschaulich klare) Folgerung, dass eine Funktion, deren Ableitungsfunktion auf einem Intervall I den konstanten Wert 0 hat, selber konstant ist, ergibt sich aus dem Mittelwertsatz. Denn an je zwei verschiedenen Stellen $x,y\in I$ wird der gleiche Funktionswert angenommen, da es nach dem Mittelwertsatz zwischen x und y eine Stelle ξ gibt mit

$$f(y)=f(x)+f'(\xi)\cdot(y-x)=f(x)+0\cdot(y-x)=f(x).$$

3.1.2 Verallgemeinerter Mittelwertsatz

Während der oben angegebene Mittelwertsatz von der Anschauung her naheliegend ist, bietet sich eine anschauliche Deutung bei seiner Verallgemeinerung nicht so unmittelbar an. Es gilt nämlich allgemeiner:

$$(f,g:[a;b]\longrightarrow\mathbb{R},\text{stetig, auf }]a;b[\text{ diffb.}\wedge\bigwedge_{x\in]a;b[}g'(x)\neq 0)\implies\bigvee_{c\in]a;b[}\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Als Spezialfall ergibt sich daraus mit $\bigwedge_{x\in[a;b]} g(x) := x$ der oben angegebene Mittelwertsatz.
Die Verallgemeinerung lässt sich nicht einfach durch zweimaliges Anwenden des Mittelwertsatzes (nämlich auf f und auf g) gewinnen, da die für jede der Funktionen im Sinne des Satzes existierende Stelle c im allgemeinen nicht die gleiche ist.
Zum Nachweis des verallgemeinerten Mittelwersatzes betrachte man unter den angegebenen Voraussetzungen für f und g die Hilfsfunktion h:

$$\bigwedge_{x\in[a;b]} h(x) := \begin{vmatrix} g(x) & g(b) & g(a) \\ f(x) & f(b) & f(a) \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Da h als Linearkombination von f und g differenzierbar im Inneren und stetig am Rand von $[a;b]$ ist, sind wegen $h(a) = h(b) = 0$ die Voraussetzungen des Satzes von Rolle erf"llt. Es gibt also im Intervall $]a;b[$ eine Stelle c mit

$$h'(c) = 0; \quad \text{also} \quad f'(c)\cdot(g(b)-g(a)) - g'(c)\cdot(f(b)-f(a)) = 0.$$

Da g aufgrund der Voraussetzung streng monoton ist, darf durch $g(b)-g(a)$ dividiert werden, so dass sich die behauptete Gleichung ergibt.

3.2 Folgerungen aus dem Mittelwertsatz

3.2.1 $f' = o \quad \Rightarrow \quad f$ ist konstant

Gibt es für eine auf $]a;b[$ differenzierbare und bei a, b stetige Funktion f Stellen c_1, c_2, an den unterschiedliche Funktionswerte angenommen werden, gibt es nach dem Mittelwertsatz auch eine Stelle c zwischen c_1 und c_2, an denen die Ableitung verschieden von null ist. Nur eine konstante Funktion hat also als Ableitung die Nullfunktion.

3.2.2 Globaler Wachstumssatz

Hat eine auf einem abgeschlossenen Intervall $[a;b]$ stetige, im Inneren des Intervalls differenzierbare Funktion an allen Stellen aus $]a;b[$ eine positive Ableitung, dann ist sie streng isoton.
Zum Nachweis ist zu zeigen:

$$\bigwedge_{x,y\in[a;b]} (x<y\Rightarrow f(x)<f(y))$$

Aus $a \leq x < y \leq b$ folgt nach dem Mittelwertsatz die Existenz einer Stelle $c \in]x;y[$ mit

$$f(y) = f(x) + f'(c)(y-x) > f(x).$$

3.2.3 Fixpunktsatz für differenzierbare Funktionen

Ist f eine stetige, auf einem abgeschlossenen Intervall $[a;b]$ definierte Funktion, deren Funktionswerte alle in $[a;b]$ liegen, dann hat f nach dem entsprechenden Satz über stetige Funktionen (mindestens) einen Fixpunkt. Setzt man zusätzlich voraus, dass f differenzierbar ist, und eine reelle Zahl q mit $0 \leq q < 1$ existiert, durch welche die Ableitung an allen Stellen betraglich nach oben beschränkt ist, so gilt zusätzlich zur reinen Existenzaussage über einen Fixpunkt:

(1) Die Funktion f hat genau einen Fixpunkt c.

(2) Definiert man eine Folge (a_n) durch

$$a_0 := a \quad \wedge \quad \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} a_{n+1} := f(a_n),$$

dann konvergiert die Folge (a_n) gegen den Fixpunkt c.

Zu (1): Es muss nur noch gezeigt werden, dass nicht zwei verschiedene Fixpunkte c und d existieren können. Aus der Annahme, dass c und d ($c, d \in [a;b]; c \neq d$) Fixpunkte sind, folgt nach dem Mittelwertsatz, dass im Intervall mit den Rändern c und d eine Stelle ξ existiert mit

$$|d-c| = |f(d) - f(c)| = |f'(\xi)| \cdot |d-c| \leq q \cdot |d-c| < |d-c|,$$

woraus durch Widerspruch die Eindeutigkeit des Fixpunkts folgt.

Zu (2): Nach dem Mittelwertsatz gibt es für jede natürliche Zahl n mit $a_n \neq c$ eine Stelle ξ im Intervall zwischen a_{n+1} und c, für die folgendes gilt:

$$(|a_{n+1} - c| = |f(a_n) - f(c)| = |f'(\xi)| \cdot |a_n - c| \leq q \cdot |a_n - c|)$$

Die so erhaltene Ungleichung $|a_{n+1} - c| \leq q \cdot |a_n - c|$ gilt wegen $f(c) = c$ auch für den Fall $a_n = c$. Durch vollständige Induktion zeigt man

$$|a_0 - c| \leq |a - c| \wedge \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} |a_{n+1} - c| \leq q \cdot |a_n - c| \Longrightarrow \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} |a_n - c| \leq q^n \cdot |a - c|.$$

Da (q^n) wegen $|q| < 1|$ eine Nullfolge ist, ist nach dem Majorantensatz auch $(a_n - c)$ eine Nullfolge, was äquivalent zu $\lim_{n\to\infty} a_n = c$ ist.

Bemerkung: Aufgrund der Eindeutigkeit des Grenzwerts folgt aus (2) noch einmal die in (1) bewiesene Eindeutigkeit des Fixpunktes.

3.3 Zwischenwertsatz für Ableitungen

Ist eine Funktion f auf einem Intervall $[a;b]$ differenzierbar mit $f'(a) < f'(b)$, und ist λ eine reelle Zahl aus dem offfenen Intervall $]f(a); f(b)[$, dann gibt es in $]a;b[$ eine Stelle ξ mit $f'(\xi) = \lambda$.

1. Reduktion

   Es genügt, den Beweis für den Spezialfall $\lambda = 0$ zu führen, denn für die durch

   $$\bigwedge_{x\in[a;b]} g(x) := f(x) - \lambda x$$

   definierte Funktion g folgt dann wegen $g'(a) = f'(a) - \lambda < 0 \ \wedge \ g'(b) = f'(b) - \lambda x > 0$

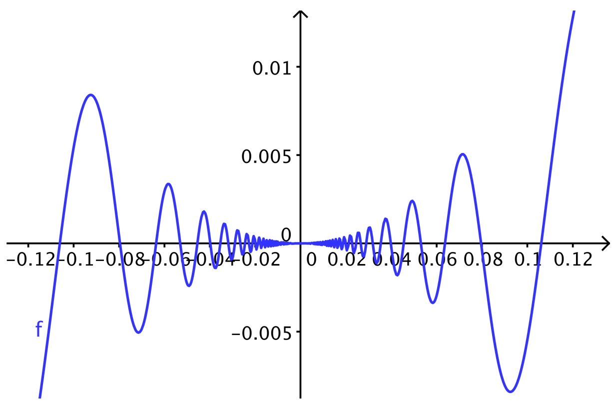
   die Existenz einer Stelle $\xi \in]a;b[$ mit $g'(\xi) = 0$, also $f'(\xi) = \lambda$.

2. Beweis der auf den Spezialfall $\lambda = 0$ reduzierten Behauptung

   Nach dem Satz vom Maximum und Minimum stetiger Funktionen auf abgeschlossenen Intervallen gibt es eine Stelle $\xi \in [a;b]$, an der f ein Minimum annimmt. Dabei kann ξ keiner der Werte a oder b sein, da nach dem lokalen Wachstumssatz f wegen $f'(a) < 0$ rechts von a kleinere Werte als $f(a)$ annimmt; analog folgt $\xi \neq b$.

   Mithin liegt ξ im offenen Intervall $]a;b[$; aufgrund der notwendigen Bedingung für Extrema an inneren Punkten der Argumentmenge gilt also $f'(\xi) = 0$.

3. Abgrenzung zum Zwischenwertsatz für stetige Funktionen durch ein Gegenbeispiel
   - Da sich jede auf einem Intervall $[a;b]$ definierte stetige Funktion f als Ableitung der durch
   $$\bigwedge_{x\in[a;b]} F(x) := \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$
   definierten Integralfunktion F erhalten lässt, ist damit auch ein (weiterer) Beweis des Zwischenwertsatzes für stetige Funktionen gegeben.
   - Umgekehrt braucht aber die Ableitung einer differenzierbaren Funktion keineswegs stetig zu sein, wie das Beispiel der folgenden auf ganz $\mathbb{R}$ definierten Funktion f zeigt:
   $$\bigwedge_{x\in\mathbb{R}^*} f(x) := x^2 \cdot \sin(\frac{1}{x}); \quad f(0) := 0$$
   Die Funktion ist bei 0 differenzierbar mit Ableitung 0, denn
   $$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^2 \cdot \sin(\frac{1}{x}) - 0}{x} = x \cdot \sin(\frac{1}{x}) \to 0 \quad (x \to 0).$$
   Für jede von 0 verschiedene Stelle x liefern die Ableitungsregeln
   $$f'(x) = 2x \cdot \sin(\frac{1}{x}) + x^2 \cdot \cos(\frac{1}{x}) \cdot \frac{-1}{x^2} = 2x \cdot \sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x}).$$
   An der Stelle 0 hat $f'(0)$ nicht den Grenzwert 0 (und auch keinen anderen Grenzwert), denn $\lim_{x\to 0} 2x \cdot \sin(\frac{1}{x}) = 0$, wohingegen es zu $\cos(\frac{1}{x})$ in jedem Intervall um 0 Stellen gibt, an denen der Wert 1 angenommen wird; man betrachte dazu die Stelle $x = \frac{1}{2n\pi}; n \in N^*$.



4. Folgerung zur Art der möglichen Unstetigkeit bei Ableitungen

   Die einzig mögliche Art der Unstetigkeit ist oszillatorisch, da sowohl eine Sprungstelle wie auch ein uneigentlicher Grenzwert ∞ durch den oben angegebenen Zwischenwertsatz für Ableitungen ausgeschlossen werden.

(Letzte Bearbeitung 2011-11-02)