Planetenbahnen als Beispiel ebener Kurven

Aus dem Mathematik-Leistungskurs Abi 1982

Klaus-R. Löffler

Ein Beispiel aus der Theorie der ebenen Kurven

Ausgangspunkt der folgenden Überlegungen ist die Situation der Planeten- bzw. Satellitenbewegung um einen Zentralkörper. Legt man den Ursprung eines räumlichen Koordinatensystems in den Mittelpunkt des Zentralkörpers, so liefert die Grundgleichung der Mechanik $\vec{K} = m\vec{f}''$; dabei ist m die Masse des Satelliten, $\vec{f}$ die zu seiner Bewegung gehörende Weg-Zeit-Funktion.
Andererseits liefert das Gravitationsgesetz $K = \gamma\frac{mM}{r^2}$; dabei ist γ die Gravitationskonstante, r der Abstand der beiden Körper zur Zeit t, (also $r(t) = |\vec{f}(t)|$) und M die Masse des Zentralkörpers.
Berücksichtigt man, dass hier die Kraft auf den Körper der Masse m in Richtung des Zentralkörpers wirkt, erhält man die vektorielle Form des Gravitationsgesetzes: $\vec{K} = -\gamma \cdot \frac{mM}{r^3}\vec{f}$; hieraus gewinnt man durch Gleichsetzen der Ausdrücke für $\vec{K}$ die im folgenden benötigte Gleichung

$$m \cdot \vec{f}'' = -\gamma \cdot \frac{mM}{r^3}\vec{f},$$

die sich nach Division durch m $(\neq 0)$ vereinfacht zu

$$(*) \quad \vec{f}'' = -\frac{M}{r^3}\vec{f} \quad .$$

$\vec{f}''$ und $\vec{f}$ sind also linear abhängig, somit gilt $\vec{f} \times \vec{f}'' = \vec{o}$.
Wegen $(\vec{f} \times \vec{f}')' = \vec{f}' \times \vec{f}' + \vec{f} \times \vec{f}'' = \vec{o} + \vec{o} = \vec{o}$ kann man schließen, daß die Vektorfunktion $\vec{f} \times \vec{f}'$ konstant ist: Es gibt also einen Vektor $\vec{d}$, der stets als Ergebnis der Verknüpfung $\vec{f} \times \vec{f}'$ erhalten wird.

Falls $\vec{d}$ der Nullvektor ist, bewegt sich der Satellit längs der Verbindungsgeraden Satellit - Zentralkörper. Dieser - nicht interessante - Sonderfall soll hier nicht betrachtet werden; es sei also $\vec{d}$ verschieden von $\vec{o}$.

Dann sind für jedes t die Vektoren $\vec{f}(t)$ und $\vec{f}'(t)$ linear unabhängig; da sie die Gleichung $\vec{x} * \vec{d} = 0$ erfüllen, liegen die Spitzen der zugehörigen Ortspfeile in der senkrecht auf der durch $\vec{d}$ bestimmten Richtung stehenden Ebene durch den Nullpunkt. Man erhält daher als erstes Ergebnis:
<u>Die Bahn des Satelliten liegt in einer Ebene</u>; diese Ebene enthält auch den Zentralkörper.
Daher darf der Flächensatz für ebene Kurven angewendet werden. Als Inhalt A der Fläche, die im Zeitintervall $[a, b]$ vom Leitstrahl des Satelliten überstrichen wird, ergibt sich

$$A = \frac{1}{2} \cdot \int_a^b |\vec{f}(t) \times \vec{f}'(t)|\mathrm{d}t = \frac{1}{2} \cdot \int_a^b |\vec{d}|\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(b-a) \cdot |\vec{d}|$$

Hieraus liest man als zweites Ergebnis ab:
<u>Der Leitstrahl des Satelliten überstreicht in gleich langen Zeitintervallen gleichgroße Flächen.</u>

Wenn also die Entfernung des Satelliten vom Zentralkörper nicht konstant ist, so ist die Winkelgeschwindigkeit um so größer, je geringer die Entfernung ist. Allerdings lässt sich aus den bisherigen Ergebnissen noch nicht die Bahnkurve angeben. Ihre Gleichung soll im Folgenden hergeleitet werden.

Für die benötigten Umformungen werden drei Gleichungen bereitgestellt:

(1) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} * \vec{c})\vec{b} - (\vec{b} * \vec{c})\vec{a}$ (Identität von Lagrange)

(2) $\vec{f} * \vec{f'} = r \cdot r'$; (denn $\vec{f} * \vec{f} = r^2$; Ableiten, dann Division durch 2)

(3) $(\frac{1}{r} \cdot \vec{f})' = \frac{1}{r^2} \cdot (r\vec{f'} - r'\vec{f})$

Die Beweise zu (1) und (3) ergeben sich unmittelbar durch Nachrechnen mit Hilfe der Komponentendarstellung.
Bei einer Kreisbahn des Satelliten mit dem Zentralkörper als Mittelpunkt ist r konstant, also $r' = 0$; somit ist nach (2) $\vec{f}$ orthogonal zu $\vec{f'}$. In diesem Spezialfall ist also $\vec{f}$ linear abhängig von $\vec{d} \times \vec{f'}$. Um zu Aussagen über $\vec{f}$ zu gelangen, wird zunächst der Vektor $\vec{d} \times \vec{f'}$ untersucht.

Da noch kein Zusammenhang zwischen $\vec{f}$ und $\vec{f'}$ ermittelt worden ist, wohl aber $\vec{f''}$ nach nach $(*)$ durch $\vec{f}$ auszudrücken ist, betrachte man zunächst die Ableitung von $\vec{d} \times \vec{f'}$.

$$
\begin{aligned}
(\vec{d} \times \vec{f'})' &= \vec{d'} \times \vec{f'} + \vec{d} \times \vec{f''} \\
&= \vec{o} + (\vec{f'} \times \vec{f''}) \times \vec{f''} && \text{(nach Festlegung von } \vec{d}) \\
&= (\vec{f} \times \vec{f'}) \times (-\frac{\gamma \cdot M}{r^3}\vec{f}) && \text{(nach } (*)) \\
&= -\frac{\gamma M}{r^3}(\vec{f} \times \vec{f'}) \times \vec{f} \\
&= -\frac{\gamma M}{r^3}[(\vec{f} * \vec{f})\vec{f'} - (\vec{f'} * \vec{f})\vec{f}\,] && \text{(nach (1))} \\
&= -\frac{\gamma M}{r^3}(r^2\vec{f'} - r'r\vec{f})) && \text{(nach (2))} \\
&= -\frac{\gamma M}{r^2}(r\vec{f'} - r'\vec{f}) \\
&= -\gamma M \cdot \left(\frac{1}{r} \cdot \vec{f}\right)' && \text{(vgl.(3))}
\end{aligned}
$$

Mit $-\frac{\gamma M}{r} \cdot \vec{f}$ ist also eine Funktion gefunden, deren Ableitung mit der Ableitung von $\vec{d} \times \vec{f'}$ übereinstimmt. Dadurch ist aber $\vec{d} \times \vec{f'}$ - bis auf eine additive Konstante, die hier $-\vec{a}$ genannt werden soll - festgelegt:

$$\vec{d} \times \vec{f'} = -\gamma M \cdot (\frac{1}{r} \cdot \vec{f}) - \vec{a} \quad .$$

Bildet man auf beiden Seiten der Gleichung das Skalarprodukt mit $\vec{f}$, so erhält man:

$$(\vec{d} \times \vec{f'}) * \vec{f} = -\gamma M \cdot \frac{\vec{f} * \vec{f}}{r} - \vec{a} * \vec{f} \quad .$$

Formt man die linke Seite nach den Regeln des Spatprodukts (zyklisch) um, so ergibt sich dort wegen $\vec{f} \times \vec{f'} = \vec{d}$ das skalare Produkt $-\vec{d} * \vec{d}$. Auf der rechten Seite kann man wegen $\vec{f} * \vec{f} = r^2$ den Bruch mit r kürzen. Beachtet man noch die Bedeutung des Skalarprodukts im $\mathbb{R}^3$, so ergibt sich hiernach:

$$-\vec{d} * \vec{d} = -\gamma M r - |\vec{a}| \cdot r \cdot \cos\left(\angle(\vec{a}, \vec{f})\right)$$

Legt man nun die x-Achse des in der Bahnebene um den Ursprung noch beliebig zu drehenden Koordiantensystems so, dass der Ortsvektor zu $\vec{a}$ in Richtung der positiven x-Achse verläuft (und beliebig, falls $\vec{a} = \vec{o}$), dann ist $\angle(\vec{a}, \vec{f})$ der Winkel zwischen x-Achse und Leitstrahl; seine Größe wird nachfolgend mit φ bezeichnet.
Setzt man außerdem $p := \frac{\vec{d} * \vec{d}}{\gamma M}$ und $\varepsilon := \frac{|\vec{a}|}{\gamma M}$, so nimmt die erhaltene Gleichung folgende Form an :

$$(**) \quad p = r(1 + \varepsilon \cdot \cos(\varphi)).$$

Dabei ist p eine von Null verschiedene positive Zahl, da der Fall $\vec{d} = \vec{o}$ ausgeschlossen worden ist und M ebenso wie γ positiv ist. Es kann daher nicht eintreten, dass $1 + \varepsilon \cdot \cos(\gamma)$ verschwindet; die Auflösung der Gleichung nach r ergibt:

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cdot \cos(\varphi)}$$

Als Quotient einer nicht-negativen und einer positiven Zahl ist ε nicht negativ. Im Falle $\varepsilon = 0$ ergibt sich $r = p$. Der Abstand des Satelliten vom Zentralkörper ist dann konstant $= p$; dieser wenig interessante Fall soll im Folgenden ausgeschlossen werden, sodass nur noch Möglichkeiten mit positivem ε zu untersuchen sind.
Drückt man $(**)$ mit Hilfe der kartesischen Koordinaten x und y aus, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} p &= r \cdot (1 + \varepsilon \cdot \frac{x}{r}) \\ &= r + \varepsilon \cdot x \end{aligned}$$

Die Gleichung $r = p - \varepsilon \cdot x$ liefert durch Quadrieren:

$$x^2 + y^2 = p^2 - 2p\varepsilon x + \varepsilon^2 x^2, \quad \text{also} \quad y^2 = p^2 - 2p\varepsilon x + (\varepsilon^2 - 1)x^2$$

Im Sonderfall $\varepsilon = 1$ wird aus der obigen Gleichung : $y^2 = p^2 - 2px$.
Dieser einfach zu behandelnde Spezialfall soll bei den weiteren Überlegungen ausgeschlossen werden, sodass nunmehr ε als positive, von eins verschiedene Zahl angenommen wird.

Der Ausdruck für wird zunächst weiter umgeformt, dabei sei $q := \varepsilon^2 - 1$.

$$\begin{aligned} y^2 &= p^2 - 2p\varepsilon x + qx^2 \\ &= q(x^2 - 2\frac{p\varepsilon x}{q} + \frac{p^2}{q}) \\ &= q(x^2 - 2\frac{p\varepsilon x}{q} + \frac{p^2\varepsilon^2}{q^2} - \frac{p^2\varepsilon^2}{q^2} + \frac{p^2}{q}) \\ &= q\left((x - \frac{p\varepsilon}{q})^2 - \frac{p^2\varepsilon^2}{q^2} + \frac{p^2}{q}\right) \\ &= q\left((x - \frac{p\varepsilon}{q})^2 - \frac{p^2(q+1)}{q^2} + \frac{p^2}{q}\right) \\ &= q\left((x - \frac{p\varepsilon}{q})^2 - \frac{p^2}{q^2}\right) \end{aligned}$$

Führt man eine Verschiebung längs der x-Achse um den Wert $\frac{p\varepsilon}{q}$ durch, gelangt die zugehörige Kurve offensichtlich in punktsymmetrische Lage zum Ursprung des Koordinatensystems.
Nach der Verschiebung hat man die einfache Gleichung $y^2 = q\left(x^2 - (\frac{p}{q})^2\right)$.
Mit den Fallunterscheidungen $q < 0$ bzw. $q > 0$, also $\varepsilon < 1$ bzw. $\varepsilon > 1$ erfolgt die endgültige Klassifizierung der Kurven.