Die Exponentialfunktion

- Herleitung und einige Eigenschaften

Klaus-R. Löffler

Inhaltsverzeichnis

0.1 Die Funktionalgleichung

Ausgangspunkt für die nachfolgenden Überlegungen ist das Wachstum (oder der Zerfall als negatives Wachstum) einer Masse, wobei der Zuwachs (bzw. die durch Zerfall verschwundene Masse) in einem bestimmten Zeitraum proportional zur Anfangsmasse ist.
Bezeichnet man also die Masse zum Zeitpunkt t mit $f(t)$ und betrachtet ein Zeitintervall der Länge h, so gilt

(1) $$\frac{f(t+h) - f(t)}{f(t)} = \frac{f(h) - f(0)}{f(0)}.$$

Zur Vereinfachung kann man die Einheit für die Masse so wählen, dass die zerfallende bzw. wachsende Substanz zum Zeitpunkt $t = 0$ bezüglich dieser Einheit die Maßzahl 1 hat. Es darf also vorausgesetzt werden

(2) $$f(0) = 1 \quad .$$

Durch Einsetzen von $f(0) = 1$ und Multiplizieren von (1) mit $f(t) \cdot f(0)$ ergibt sich

(3) $$f(t+h) - f(t) = f(h) \cdot f(t) - f(t), \qquad \text{also} \qquad f(t+h) = f(h) \cdot f(t) \quad .$$

Die Gleichung wird auch als *Funktionalgleichung der Exponentialfunktion* bezeichnet:

(4) $$\bigwedge_{a,b \in \mathbb{R}} f(a+b) = f(a) \cdot f(b) \quad .$$

0.2 Die Ableitung

Die Funktion f wird nachfolgend als differenzierbar vorausgesetzt. Ihre Ableitung erhält man als Grenzwert des Differenzenquotienten $\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$ an der Stelle 0. Aufgrund der Funktionalgleichung und wegen $f(0) = 1$ gilt

(5) $\quad f(t+h) - f(t) = f(t) \cdot f(h) - f(t) = (f(h) - f(0)) \cdot f(t),$

also

(6) $\quad \dfrac{f(t+h) - f(t)}{h} = f(t) \cdot \dfrac{f(h) - f(0)}{h} \quad .$

Wenn h gegen 0 strebt, strebt der linke Teil der Gleichung (6) gegen die Ableitung von f an der Stelle t, während die rechte Seite gegen $f(t) \cdot f'(0)$ strebt. Daraus folgt, dass an jeder Stelle $t \in \mathbb{R}$ die Ableitung von f den Wert $f'(0) \cdot f(t)$ hat.
Die Maßzahl für die Zerfallsgeschwindigkeit hängt von der gewählten Zeiteinheit ab; diese sei zur Vereinfachung nun so gewählt, dass zu $f'(0)$ die Maßzahl 1 gehört. Nachfolgend wird also der Spezialfall der Wachstums- bzw. Zerfallsfunktion f betrachtet, für welche die folgende Differentialgleichung gilt:

(7) $\quad \bigwedge_{x \in \mathbb{R}} f'(x) = f(x) \quad \wedge \quad f(0) = f'(0) = 1.$

Diese Funktion wird zu Ehren des Mathematikers Leonhard Euler als *Eulersche Funktion* bezeichnet. Ihr Funktionswert an der Stelle 1 wird mit dem Buchstaben e bezeichnet. An späterer Stelle wird ein Näherungswert für diese *Eulersche Zahl* e bestimmt.

0.3 Von der Differentialgleichung zur Funktionalgleichung

In der bisherigen Darstellung war der Ausgangspunkt für die Untersuchung der Eulerschen Funktion die konkrete Aufgabe des gleichmäßigen Wachstums und seiner Beschreibung durch eine an der Stelle 0 differenzierbare Funktion. In umgekehrter Richtung wird hier als Startpunkt die Differentialgleichung gewählt, aus der dann die Funktionalgleichung erschlossen wird. Denn ist f eine auf $\mathbb{R}$ differenzierbare Funktion mit

(8) $\quad f(0) = 1 \wedge f' = f \quad ,$

so ist nach Ketten- und Produktregel der Differentialrechnung auch die für $a \in \mathbb{R}$ definierte Funktion h mit

$$\bigwedge_{x \in \mathbb{R}} h(x) := f(a-x) \cdot f(x)$$

differenzierbar. Da sich an jeder Stelle x die Ableitung

$$h'(x) = f'(a-x) \cdot (-1) \cdot f(x) + f(a-x) \cdot f'(x) = -f(a-x) \cdot f(x) + f(a-x) \cdot f(x) = 0$$

ergibt, ist die Funktion h konstant; ihr Funktionswert errechnet sich als $h(a) = f(0) \cdot f(a) = f(a)$. Aus dem Ergebnis

(9) $\quad \bigwedge_{a \in \mathbb{R}} \bigwedge_{x \in \mathbb{R}} f(a-x) \cdot f(x) = f(a)$

folgt mit $a = 0$ die Identität

(10) $\quad f(-x) \cdot f(x) = f(0) \quad (= 1)$

Die Funktion hat also keine Nullstellen und nimmt somit wegen $f(0) > 0$ nur positive Werte an. Mit der Substitution $a := y + x$ ergibt sich aus (19) die Funktionalgleichung der Eulerschen Funktion: $f(y) \cdot f(x) = f(y+x)$.

0.4 Eigenschaften der Eulerschen Funktion

Die Eulersche Funktion wird nachfolgend mit E bezeichnet[1].
Für jede reelle Zahl x gilt $E(x)\cdot E(-x) = E(0) = 1$, also $E(x) \neq 0$. Also hat die Eulersche Funktion keine Nullstellen, und da zusammen mit (8) folgt $E(x) = E(2\cdot\frac{x}{2}) = E(\frac{x}{2})^2 \geq 0$, sind alle Funktionswerte positive Zahlen:

$$(11)\quad \bigwedge_{x\in\mathbb{R}} E(x) > 0 \quad .$$

Aus der (vorausgesetzten) Differenzierbarkeit von E an der Stelle 0 folgte nicht nur die Differenzierbarkeit auf ganz $\mathbb{R}$, sondern wegen $E' = E$ auch die Existenz der Ableitungen beliebig hoher Ordnung. Aus $\bigwedge_{x\in\mathbb{R}} E(x) > 0 \quad \wedge \quad E'' = E' = E$ folgt, dass der Graph der Eulerschen Funktion linksdrehend ist, streng monoton steigt und ganz oberhalb der x-Achse verläuft . Aus der Funktionalgleichung ergibt sich für reelles x und natürliches n durch vollständige Induktion mit der Rekursion $E((n+1)x) = E(nx+x) = E(nx)\cdot E(x)$:

$$(12)\quad \bigwedge_{x\in\mathbb{R}}\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} E(nx) = (E(x))^n \quad .$$

Die Gleichung (8) gilt nicht nur für natürliche Zahlen, sondern für alle ganzen Zahlen n, denn für $n = 0$ ist sie wegen $E(0x) = E(0) = 1 = E(x)^0$ erfüllt, und ist n negativ, so hat man

$$(13)\quad E(nx) = \frac{E(nx)\cdot E(-nx)}{E(-nx)} = \frac{E(0)}{E(-nx)} = \frac{1}{E(x)^n} = E(x)^n \quad .$$

Und schließlich folgt für $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$

$$(14)\quad E(p) = E(q\cdot\frac{p}{q}) = E(\frac{p}{q})^q, \quad \text{also} \quad E(\frac{p}{q}) = \sqrt[q]{E(p)} = \sqrt[q]{E(1)^p} = \mathsf{e}^{\frac{p}{q}} \quad .$$

Da die Eulersche Funktion stetig ist, folgt aus (13), dass für alle reellen Zahlen gilt: $E(x) = \mathsf{e}^x$.
Als Folgerung aus der entsprechenden Potenzregel erhält man $(E(x))^y = E(x\cdot y)$, denn

$$(15)\quad (E(x))^y = (\mathsf{e}^x)^y = \mathsf{e}^{x\cdot y} = E(x\cdot y) \; .$$

0.5 Eine Berechnung von e

Für jede positive ganze Zahl n liefert Mittelwertsatz der Differentialrechnung über dem Intervall $[-\frac{1}{n+1};0]$, angewendet auf die Eulersche Funktion, die Existenz einer Stelle $\xi \in]-\frac{1}{n+1};0[$ mit

$$(16)\quad \frac{E(0)-E(-\frac{1}{n+1})}{\frac{1}{n+1}} = E'(\xi) = E(\xi) < E(0) = 1, \quad \text{also} \quad 1 - E(-\frac{1}{n+1}) < \frac{1}{n+1} \quad .$$

Elementare Umformung ergibt

$$(17)\quad E(-\frac{1}{n+1}) > 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}, \quad \text{also} \quad E(-1) > \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \quad \text{und somit}$$

$$(18)\quad \mathsf{e} = E(1) = \frac{1}{E(-1)} < \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad .$$

Mit $n = 1$ erhält man daraus als erste grobe Abschätzung nach oben $\mathsf{e} < 4$.

[1] Üblicherweise wird ihr Wert an einer Stelle x als e^x oder $\exp(x)$ notiert.

Erneute Anwendung des Mittelwertsatzes, diesmal über $[0;\frac{1}{n}]$, liefert die Existenz eines $\xi \in]0;\frac{1}{n}[$ mit

$$(19)\quad \frac{E(\frac{1}{n})-E(0)}{\frac{1}{n}} = E'(\xi) = E(\xi) > E(0) = 1, \quad \text{also} \quad E(\frac{1}{n}) > 1+\frac{1}{n} \quad \text{und somit} \quad \mathsf{e} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad .$$

Mit (14) und (15) hat man

$$(20)\quad \bigwedge_{n\in\mathbb{N}^*} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \mathsf{e} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad .$$

Umformen ergibt

$$(21)\quad 0 < \mathsf{e} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n} < \frac{\mathsf{e}}{n} < \frac{4}{n} \quad .$$

Nach dem Majorantenkriterium konvergiert also die Folge $\left((1+\frac{1}{n})^n\right)$ von unten gegen die Eulersche Zahl.

0.6 Näherung der Eulerschen Funktion durch ein Polynom

Wie nachfolgend gezeigt wird, liefert für $n \in \mathbb{N}^*$ das Polynom $p_n(x) := \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!}$ eine untere Abschätzung[2] für $E(x)$ mit $x \in \mathbb{R}_+$.
Denn aufgrund der Isotonie von E und wegen $E(0) = 1$ gilt $E(x) \geq 1$ für jedes positive reelle x, so dass die Aussage $E(x) \geq p_0(x)$ als richtig bestätigt ist. Aus der Induktionsvoraussetzung

$$n \in \mathbb{N}^*, \quad \bigwedge_{x\in\mathbb{R}_+} E(x) \geq p_{n-1}(x)$$

folgt durch Integration über $[0;x]$ nun $\int_0^x E(t)\mathrm{d}t \geq \int_0^x \sum_{i=0}^{n-1} \frac{t^i}{i!}\ \mathrm{d}t$, also

$$E(x) - E(0) \geq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x^{i+1}}{(i+1)!}\ , \quad \text{mithin} \quad E(x) - 1 \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{x^i}{i!} \quad \text{und damit} \quad E(x) \geq \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} \quad .$$

Da $p_n(x)$ das n-te Schmiegepolynom[3] der Eulerschen Funktion ist, gibt es nach dem Satz von Taylor für jedes $x \in \mathbb{R}_+$ eine Stelle ξ im Intervall $]0;x[$ mit

$$|E(x) - p_n(x)| = \frac{f(\xi)}{(n+1)!}\ x^{n+1}.$$

Da für jede reelle Zahl x die Folge $(\frac{x^n}{n!})$ gegen 0 konvergiert[4], kann man mit p_n als Ersatzfunktion jeden Wert der Eulerschen Funktion beliebig genau berechnen.
Speziell für $x = 1$ ergibt sich

$$(22)\quad \mathsf{e} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}\ ; \qquad \mathsf{e} - \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} < \frac{\mathsf{e}^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{4^{n+1}}{(n+1)!} \quad .$$

Z.B. mit $n = 10$ ergibt sich mit (21), dass die Eulersche Zahl zwischen 2,7 und 2,9 liegt. Verwendet man als Folgerung $\mathsf{e} < 3$, zeigt die entsprechende Verschärfung von (21), dass schon weniger Summanden für eine gute Approximation von e ausreichen.

[2] An späterer Stelle wird gezeigt, dass mit diesem Polynom als Näherungsfunktion die Werte von E beliebig genau ausgerechnet werden können.

[3] Das an der Stelle 0 entwickelte n-te Schmiegepolynom einer (mindestens) n-mal bei 0 differenzierbaren Funktion g hat die Form $\sum_{i=0}^{n} \frac{g^{(i)}(0)}{i!} \cdot x^i$.

[4] Denn für $m \geq 2x$ hat man $\frac{x^n}{n!} = \frac{x^m}{m!} \cdot \frac{x^{n-m}}{(m+1)(m+2)\dots n} \leq \frac{x^m}{m!} \cdot \frac{x^{n-m}}{(2x)^{n-m}} = \frac{2^m \cdot x^m}{m!} \cdot \frac{1}{2^n} \to 0$ für $n \to \infty$

0.7 Die Irrationalität von e

Die Eulersche Zahl ist nicht rational. Zum Nachweis wird die Annahme, es gäbe natürliche Zahlen p, q mit $\mathsf{e} = \frac{p}{q}$ (O.B.d.A. $q \geq 2$) nachfolgend zum Widerspruch geführt.

$$\mathsf{e} = \frac{p}{q} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \quad \Rightarrow \; q! \cdot \mathsf{e} = \sum_{i=0}^{q} \frac{q!}{i!} + \sum_{i=q+1}^{\infty} \frac{q!}{i!} \quad .$$

Da sowohl $q! \cdot \mathsf{e}$ als auch $\sum_{i=0}^{q} \frac{q!}{i!}$ ganzzahlig sind, muss dies auch für $\sum_{i=q+1}^{\infty} \frac{q!}{i!}$ gelten.
Für jede natürliche Zahl i, die größer als q ist, gilt $i! \geq 3^{i-q} \cdot q!$.
Das ist für $i = q+1$ wegen $(q+1)! = (q+1) \cdot q! \geq 3 \cdot q!$ offensichtlich richtig und folgt für $i > q+1$ dann durch vollständige Induktion wegen

$$i! = i \cdot (i-1)! \geq (q+1) \cdot 3^{i-1-q} \cdot q! \geq 3^{i-q} \cdot q! \quad .$$

Daher ist

$$\sum_{i=q+1}^{\infty} \frac{q!}{i!} \leq \sum_{i=q+1}^{\infty} \frac{1}{3^{i-q}} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{3^i} = \frac{1}{2} \quad .$$

Damit ist die Annahme, dass die Eulersche Zahl rational ist, zum Widerspruch geführt.

0.8 Die Umkehrung der Eulerschen Funktion

Als streng isotone Funktion ist die Eulersche Funktion injektiv und somit umkehrbar. Da die Funktion nach oben nicht beschränkt ist[5], hat sie über der positiven x-Achse die Wertemenge $[1; \infty[$ und nimmt wegen $E(-x) = \frac{1}{E(x)}$ über $\mathbb{R}$ als Werte alle positiven reellen Zahlen an.
Die Umkehrfunktion liefert an jeder Stelle x als Funktionswert den sogenannten *natürlichen Logarithmus* von x an. In dieser Darstellung wird die Funktion nachfolgend mit L bezeichnet[6]. Folgerungen aus den Eigenschaften der Eulerschen Funktion:

(1) Argumentmenge von L ist die Menge der positiven reellen Zahlen, Wertemenge ist ganz $\mathbb{R}$.

(2) L ist differenzierbar; die Ableitung an der Stelle $x \in \mathbb{R}_+$ ist $L'(x) = \frac{1}{x}$, denn mit der Kettenregel erhält man für jedes $x \in \mathbb{R}+$:

$$E(L(x)) = x \;\Rightarrow\; E'(L(x)) \cdot L'(x) = 1 \Rightarrow E(L(x)) \cdot L'(x) = 1 \Rightarrow x \cdot L'(x) = 1 \Rightarrow L'(x) = \frac{1}{x}$$

(3) Für alle positiven Zahlen a, b gilt: $L(a \cdot b) = L(a) + L(b)$, denn mit $\alpha := L(a), \beta = L(b)$ hat man

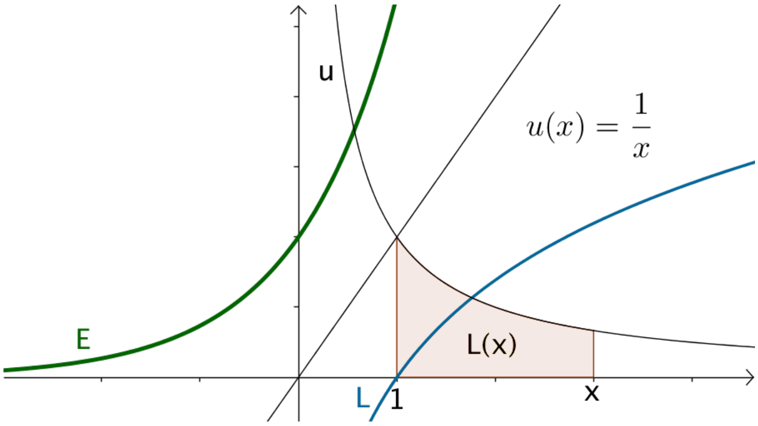
$$L(a \cdot b) = L(E(\alpha) \cdot E(\beta)) = L(E(\alpha + \beta)) = \alpha + \beta = L(a) + L(b).$$

(4) Wegen $L'(x) = \frac{1}{x}$ und $L(1) = 0$ lassen sich die Werte der Logarithmusfunktion auch für alle $x \in \mathbb{R}_+$ erhalten als

$$(23) \quad L(x) = \int_1^x \frac{1}{t} \, \mathrm{dt}.$$

Der natürliche Logarithmus einer positiven Zahl x lässt sich also auch deuten als Maßzahl der Fläche, die im Koordinatensystem von der positiven x-Achse, dem Graphen der Kehrwertfunktion u ($u(x) = \frac{1}{x}$), Funktion L und den beiden vertikalen Geraden durch die Punkte $A(1;0), B(x;0)$ berandet wird.

[5] z.B., weil unter ihren Werten alle Glieder der nach oben nicht beschränkten Folge (e^n) vorkommen.
[6] Übliche Bezeichnungen der Funktion sind *log* oder *ln*.



Mit dieser Darstellung als Integral einer einfachen isotonen Funktion kann man Näherungswerte der Logarithmusfunktion mit wenig Aufwand bestimmen; für das Integral einer solchen isotonen Funktion f über einem Intervall $[a;b]$ gilt ja allgemein

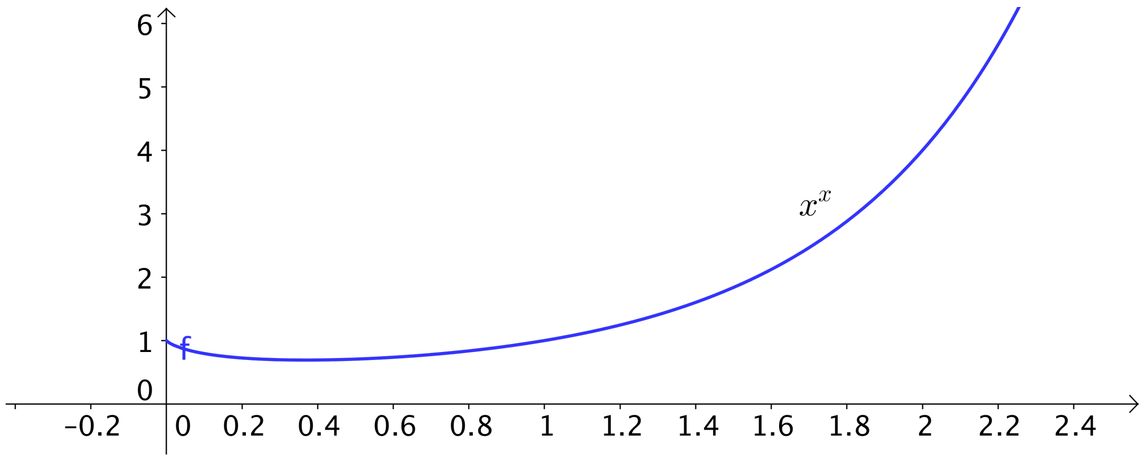
$$\frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f(a + \frac{i \cdot (b-a)}{n}) \leq \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \leq \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} f(a + \frac{i \cdot (b-a)}{n}),$$

also z.B. mit $a = 1, b = 2, f(x) = \frac{1}{x}$: $\qquad \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n+i} \leq L(2) \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+i} \quad$.

Nach (15) gilt für $a \in \mathbb{R}_+, b \in \mathbb{Q}$: $\quad \mathsf{e}^{b \cdot L(a)} = (\mathsf{e}^{L(a)})^b = (E(L(a))^b = a^b$.
Als Ableitung der allgemeinen Exponentialfunktion f mit $f(x) = a^x$ (mit $a \in \mathbb{R}_+$ erhält man daher wegen $a^x = E(x \cdot L(a))$ unter Verwendung der Kettenregel $f'(x) = L(a) \cdot a^x$.

0.9 Die Funktion mit der Gleichung $y = x^x$

Bei der Frage, wie die Potenzdefinition auf den Ausdruck 0^0 sinnvoll auszudehnen ist, gibt es die Varianten $0^0 := 0$ bzw. $0^0 := 1$, je nachdem, ob man die Variable x in dem Ausdruck $x^0|(= 1)$ oder im Ausdruck 0^x $(= 0)$ gegen 0 streben lässt.
In diesem Zusammenhang stellt sich die Frage nach Existenz und (im Falle der Existenz) dem Wert von $\lim_{x \to 0}\ x^x$.
Die Funktion f mit $f(x) = x^x$ $(= E(x \cdot L(x))$ hat die Argumentmenge $\mathbb{R}_+$ und ist - als Ergebnis der Verkettung differenzierbarer Funktionen - differenzierbar.



Die Ableitung von f ergibt sich nach Ketten- und Produktregel als

(24) $f'(x) = x^x \cdot (1 \cdot L(x) + 1) = (1 + L(x)) \cdot x^x$,

ist also negativ über] 0; E(-1) [und positiv über] E(-1); ∞ [.
Nach der L'Hospitalschen Regel hat $x \cdot L(x) \; = \frac{L(x)}{\frac{1}{x}}$ wegen

$$\lim_{x \to 0} \frac{L(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0} \frac{1x}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0} x = 0$$

aus der Stetigkeit von Logarithmus und Exponentialfunktion

(25) $\lim\limits_{x \to 0} x^x = \lim\limits_{x \to 0} E(x \cdot L(x)) = E(\lim\limits_{x \to 0} x \cdot L(x)) = E(0) = 1$.

0.10 Die hyperbolischen Funktionen

Jede auf ganz $\mathbb{R}$ (oder einem zu symmetrischen Intervall) definierte Funktion f lässt sich auf genau eine Weise als Summe einer *ungeraden*[7] Funktion g und einer geraden[8] Funktion h durh folgende Funktionsdefinitionen darstellen:

(26) $g(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2} \quad , \quad h(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2} \quad .$

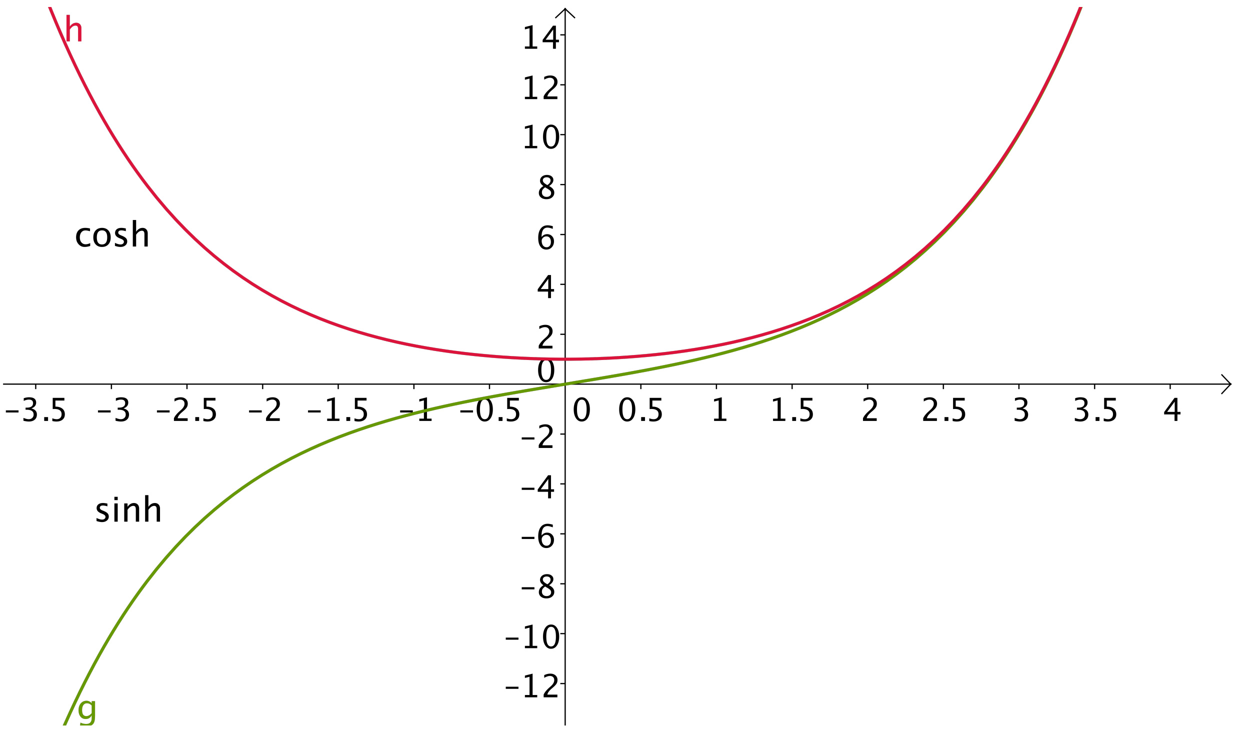
Bei der Eulerschen Funktion wird der ungerade Bestandteil als *hyperbolischer Sinus*[9] und der gerade Bestandteil als *hyperbolischer Kosinus*[10] bezeichnet:

(27) $\sinh(x) = \dfrac{E(x) - E(-x)}{2} \quad , \quad \cosh(x) = \dfrac{E(x) + E(-x)}{2} \quad .$

Im Gegensatz zu den trigonometrischen Funktionen sind die hyperbolischen Funktionen zwar nicht periodisch, haben aber ganz ähnliche Differentialgleichungen:

- sin' = cos, cos' = -sin, sin(0) = 0, cos(0) = 1
- sinh' = cosh, cosh' = sinh, sinh(0) = 0, cosh(0) = 1

[7] Eine Funktion g heißt ungerade, wenn für alle Stellen x der Argumentmenge $g(-x) = -g(x)$ gilt.
[8] Eine Funktion h heißt gerade, wenn für alle Stellen x der Argumentmenge $h(-x) = h(x)$ gilt.
[9] Sinus hyperbolicus
[10] Cosinus hyperbolicus



0.11 Die allgemeine (exponentielle) Wachstumsfunktion

Geht man bei einer allgemeinen Wachstumsfunktion f davon aus, dass die Masse proportional zur Wachstumsgeschwindigkeit ist (- das Wachstum also nicht linear, beschränkt oder logistisch[11] ist -) , dass es also eine Konstante k gibt, so dass die Differentialgleichung $f' = k \cdot f$ gilt, so kann man wegen

$$\bigwedge_{x \in \mathbb{R}} \left(f(x) > 0 \quad \wedge \quad \frac{f'(x)}{f(x)} = k \right)$$

durch Integration über [1; x] folgern, dass es eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ gibt, welche für alle $x \in \mathbb{R}$ die Gleichung

$$L(f(x)) = kx + c, \quad \text{also} \quad f(x) = E(kx + c)$$

erfüllt. Der Wert $f(0)$ $(= E(c))$ wird auch als *Anfangsbestand* bezeichnet.
Stand 2015-07-07

[11] Ein Wachstum heißt logistisch mit der Schranke S, wenn die Änderungsrate $f(t+1) - f(t)$ bzw. $f'(t)$ nicht konstant, sondern proportional zum Produkt aus Bestand $f(t)$ und Sättigungsmanko $f(t) \cdot (S - f(t))$ ist.