Klaus-R. Löffler, Gymnasium Leichlingen

Extremwertaufgaben

I. Das Problem

Bei rein mathematischen Problemen ist die Größe der verwendeten Zahlen fast unerheblich. Es bedeutet nur unwesentlichen Mehraufwand, wenn bei der Lösung fünfstellige anstatt zweistellige Zahlen verwendet werden müssen, und auch die Größe des Endergebnisses ist letztlich für den Lösenden belanglos.

Das ist bei den numerischen Größen des praktischen Lebens ganz anders: Es ist keineswegs egal, ob man für das gleiche Produkt 65 Euro oder 650 Euro bezahlt, ob man zur Fertigung eines Produkts drei oder fünf Stunden braucht, oder ob man die Ingredienzien für ein Heilmittel einmal oder fünfmal im Topf sieden lassen muss. Je nach der Art der Größen möchte man, dass sie möglich groß bzw. möglichst klein sind: Gewinne versucht man zu maximieren, Kosten - sei es an Material, in Form von aufzubringender Zeit oder sonstigem Aufwand - will man minimieren.

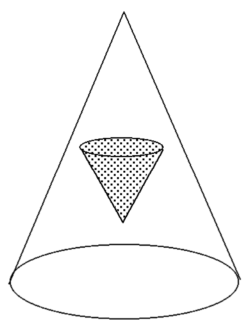
Einführende Beispiele:

(1) Ein Autor von Kriminalromanen will seine Bücher im Selbstverlag veröffentlichen und muss sich entscheiden, wie viele Bücher er drucken lässt und welchen Verkaufspreis er festlegen will. Je höher die Auflage ist, umso geringer ist der Druckpreis pro Buch, aber auch den Druck der Bücher, die er später nicht verkauft, muss er ja bezahlen. Beim Verkauf kann er daher davon ausgehen, dass vom Preis nicht nur sein Gewinn pro Buch, sondern auch die Anzahl der verkauften Bücher abhängt.
Er muss also mindestens zwei *Parameter* (Anzahl der gedruckten Exemplare und Verkaufspreis) festlegen. In der Regel wird er das so versuchen, dass sein Gewinn (Umsatz minus Kosten) möglichst groß ist.

(2) Ein Lokalpolitiker will als Wahlwerbung den örtlichen Geschäftsleuten, die er für Multiplikatoren hält, kleine Geschenke machen und daneben durch eine größere Spende für das regionale Krankenhaus weitere Stimmen gewinnen. Wie teilt er das zur Verfügung stehende Kapital von 15000 Euro auf diese beiden Verwendungszwecke auf, um damit einen maximalen Wahlerfolg zu erzielen?
Falls die Geschenkverteilung auf die Geschäftsleute nach bereits festgelegten Schlüssel erfolgen soll, ist hier der Wert eines Parameters (Höhe der Spende für das Krankenhaus) festzulegen.

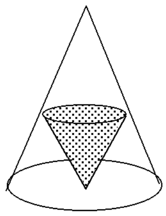
(3) Der Briefbote eines Unternehmens soll an achtzehn verschiedene Adressen Unterlagen überbringen. In welcher Reihenfolge sollte er die Adressaten aufsuchen, damit die Weglänge und damit der Zeitaufwand minimal sind.
Da sich der Bote hier für die Werte von 17 Parametern (erster, zweiter, ... ,siebzehnter Adressat) entscheiden muss, die andererseits aber jeweils nur endlich viele Werte annehmen können, ist diese Aufgabe aus der endlichen Mathematik ein typisches Problem für die Behandlung durch ein Computerprogramm.

(4) Ein Hersteller von Schmuck bezieht aus der Abfällen einer metallverarbeitenden Werkstatt 5mm hohe Aluminiumkegel mit einem Grundflächenradius von 2mm. Er möchte diese zu Schmuckanhängern verarbeiten, indem er sie jeweils so in einen Kegel aus Acryl einbettet, dass die Spitzen beider Kegel - wie rechts skizziert - in entgegengesetzte Richtungen zeigen. Wie sind die Maße der Acrylkegel zu wählen, damit



der Materialverbrauch pro Kegel möglichst gering ist?

Da das Volumen des Acrylkegels vom Radius seiner Grundfläche und von seiner Höhe abhängt, ist dies eine Aufgabe mit zwei Parametern. Allerdings kann offensichtlich dadurch Material eingespart werden, dass der kleine Kegel mit seinem Grundkreis den großen Kegel von innen berührt und mit seiner Spitze auf der Grundfläche des Acryl-Kegels ruht. Die beiden Parameter Grundflächenradius und Höhe sind dann offenbar voneinander abhängig: Verkleinert man den Radius der Grundfläche, vergrößert sich gleichzeitig die Höhe des umschließenden Kegels.



II. Lösungsideen

Zu (1): Aus Gründen der Vereinfachung unterstellen wir einmal, dass die Druckerei beliebige Anzahlen des Buchs zu drucken bereit ist und die Druckkosten pro Buch mit wachsender Anzahl abnehmen. Wenn dann p der Endpreis für jedes Exemplar ist, A(p) die Anzahl der Bücher ist, die zum Preise p in der vorgesehenen Zeit gekauft werden und K(x) die Druckkosten für x Bücher angibt, dann beträgt der Gewinn g in Abhängigkeit vom Preis p - sieht man von sonstigen zusssätzlichen Kosten wie Werbung, Versand, Lagerung etc. einmal ganz ab - $g(p) = p \cdot A(p) - k(A(p))$. Zwar ist die Kostenfunktion durch die Druckerei vorgegeben, die Anzahlfunktion A aber, die zu jedem geforderten Preis die Anzahl der zu diesem Preis nachgefragten Exemplare angibt, ist in der Praxis kaum zu bestimmen und sicher nicht durch einen einfachen algebraischen Term zu beschreiben. Immerhin lässt sich die Aufgabe für fiktiv vorgegebene Funktionen A und k mit den Mitteln der Analysis behandeln, wenn die Funktionen A und k hinreichend einfach sind.

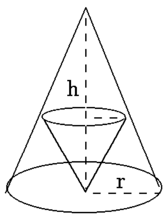
Werden zum Beispiel die Druckkosten für x Exemplare im Bereich $1 \leq x \leq 200$ durch die Funktion k mit $k(x) = \frac{3x+1}{x+1}$ beschrieben, und wird bei einem Preis p zwischen 10 und 30 (Euro) die Anzahl der nachgefragten Exemplare A(p) durch die Gleichung $A(p) = 30p - p^2$ angegeben, dann ergibt sich als Gewinnfunktion $g(p) = p \cdot (30p - p^2) - (90p - 3p^2 + 1)/(30p - p^2 + 1)$.

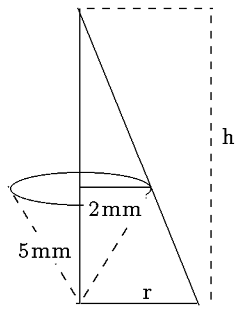
Die Untersuchung der Funktion g ergibt, dass bei einem Preis von ca. 20 Euro der maximale Gewinn erzielt wird. Für eine Aufgabenlösung mit den Mitteln der Analysis geht die Funktion allerdings über die in der Regel in einem Grundkurs vorhandenen Kenntnisse hinaus.

Zu (2): Auch wenn der Wahlkandidat hier seine Chancen optimieren möchte und eine echte Extremwertaufgabe vorliegt, dürften hier dem mathematischen Zugriff erhebliche Schwierigkeiten entgegenstehen. Möglicherweise werden die Berater dem Politiker empfehlen, gerade soviel Geld für das Krankenhaus zu spenden, dass der Betrag in der Öffentlichkeit als erheblich angesehen wird, und den Rest in die Kontaktpflege zu den Geschäftsleuten zu investieren.

Zu (3): Hier wurde die Möglichkeit zur Lösung - das Herausfinden der günstigsten Folge von Wegen unter den 17! Möglichkeiten - bereits oben bei der Problembeschreibung skizziert. Beim Kern der Aufgabe handelt es sich um ein der Analysis nicht zugängliches Problem, das aber in der Praxis häufig auftritt. So zum Beispiel, wenn mehrere verschiedene Produkte mit einer Maschine nacheinander hergestellt werden sollen, wobei zum Umrüsten von einem Produkt auf ein anderes spezifische Umrüstkosten entstehen und entschieden werden muss, welche Reihenfolge zu einer kostenoptimalen Produktion führt.

Zu (4): Aufgrund des einfachen Zusammenhangs zwischen den Parametern Höhe (h) und Grundkreisradius (r) des umbeschriebenen Acrylkegels lassen sich die Werte von h und r, für welche das Kegelvolumen $V = \frac{1}{3} r^2 \cdot \pi \cdot h$ minimal wird, im vorliegenden Fall verhältnismäßig einfach ermitteln. Die Skizze der Kegel enthält nämlich die rechts vergrößert, aber nicht maßstabsgetreu dargestellte Strahlensatzfigur, wobei die vorgegebenen Maße des kleinen Aluminiumkegels eingetragen sind. Nach dem zweiten Strahlensatz gilt unter Weglassung der Einheit (mm) nun:





$\frac{2}{r} = \frac{h-5}{h}$, also $h - 5 = \frac{2h}{r}$ und damit $hr - 5r = 2h$, also $hr - 2h = 5r$ und somit schließlich $h = \frac{5r}{r-2}$.

Durch Einsetzen der so erhaltenen *Nebenbedingung* für r und h in die Volumenformel $V = \frac{1}{3} r^2 \cdot \pi \cdot h$ erhält man $V = \frac{1}{3} r^2 \cdot \pi \cdot \frac{5r}{r-2}$.

Damit ist V nur noch von einem einzigen Parameter, nämlich r, abhängig. Mit der Funktionsgleichung $f(r) = \frac{5}{3} r^3 \cdot \pi \cdot \frac{1}{r-2}$ definiert man nun eine Funktion f, die zu jedem zulässigen r das zugehörige Volumen angibt. Dabei muss r offensichtlich größer als 2mm sein, damit die Spitze des Acrylkegels gegenüber der Spitze des Aluminiumkegels die entgegengesetzte Richtung hat. Der Definitionsbereich der Funktion f ist daher die Menge aller reellen Zahlen, die größer als 2 sind: $D_f =]\,2\,;\infty\,[$. Mit einer Funktionsuntersuchung (Kurvendiskussion) erhält man den Verlauf des Graphen von f. Wenn der absolute Tiefpunkt des Graphen die Koordinaten $(a \mid b)$ hat, bedeutet dies, dass das Volumen des äußeren Kegels (also benötigtes Volumen an Acrylmasse + Volumen des inneren Kegels) für den Grundkreisradius a_mm minimal ist und b_mm^3 beträgt.

Die Funktionsuntersuchung von f $\left(f(x) = \frac{5}{3} \pi \frac{x^3}{x-2} \right)$ benötigt die Quotientenregel (oder nach Substitution $t = x - 2$ zumindest die Ableitung der Kehrwertfunktion), stellt also eine einfache Aufgabe im Leistungskurs dar, während die Schwierigkeitseinstufung im Grundkurs vom Stand des jeweils Erreichten abhängt.

III. Wie ist konkret vorzugehen?

Das erfolgreiche Vorgehen besteht aus wenigen, weitgehend schematischen Schritten, die nachfolgend am Beispiel von drei Aufgaben aus dem Mathematik-Grundkurs 12m1 (2006/07) dargestellt werden.
Zuerst die drei Aufgaben A1, A2 und A3:

(A1) Einem Kegel mit Grundkreisradius 4 cm und Höhe 10 cm soll ein Kegel so einbeschrieben werden, dass seine Spitze auf dem Grundkreismittelpunkt des ersten Kegels ruht und sein Volumen maximal ist.

(A2) Aus einem rechteckigen Stück Papier mit den Seitenlängen 40 cm und 25 cm soll man einen Kasten ohne Deckel herstellen, indem man an jeder Ecke ein Quadrat ausschneidet und die Seitenflächen nach oben biegt.
Der Kasten soll möglichst großes Volumen haben.
Welche Höhe muss dieser Kasten haben?

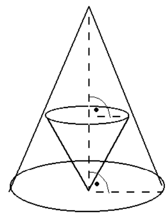
(A3) Ein quaderförmiges - nach oben offenes - Gefäß soll derart aus zwei Metallblechen (Typ B für den Boden, Typ S für die Seitenflächen) hergestellt werden, dass die Bodenfläche die Form zweier aneinandergelegter Quadrate hat und das Volumen 1 dm^3 beträgt.
Der Preis des Metallblechs pro Quadratzentimeter beträgt 0,5 Euro für Typ B; ein Quadratzentimeter Metallblech vom Typ A kostet 0,6 Euro.
Bei welchen Abmessungen des Gefäßes ist der Materialpreis minimal?

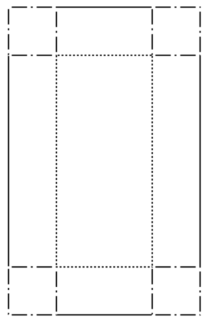
Und nun die Lösungsschritte:

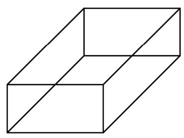
1. Schritt: Verstehen und veranschaulichen

Wie bei jeder Mathematikaufgabe steht am Anfang der Lösung das Verstehen der Aufgabenstellung. Je mehr Zeit man auf das Durchlesen der Aufgabenstellung und Nachdenken über die auftretenden Objekte und Fragestellungen verwendet, umso schneller geht später die eigentliche Arbeit, weil Fehlansätze mit zeitaufwendigem Durchlaufen von Sackgassen vermieden werden. (Die letzten Sätze bitte mehrmals lesen und auch wirklich beherzigen!)
Veranschaulichen bedeutet speziell bei geometrischen Aufgaben eine konkrete zeichnerische Darstellung, wobei wesentliche Eigenschaften (z.B. rechte Winkel) in der Skizze durch Kennzeichnung verdeutlicht werden sollten.

Bei A1 ist einem großen Kegel ist ein kleiner Kegel so einzubeschreiben, dass die Spitze des kleinen Kegel auf dem Mittelpunkt des Grundkreises vom großen Kegel ruht. Beide Kegel haben eine gemeinsame Achse, die senkrecht zu den Grundkreisradien von großem und kleinem Kegel verläuft.

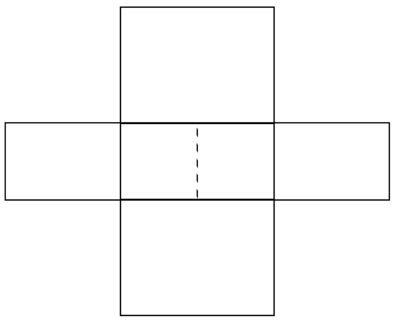


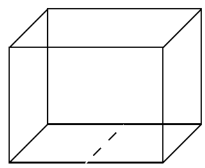




Bei A2 hat der Gegenstand der Aufgabe - der durch Angabe von Länge und Breite gegebene rechteckige Papierbogen - zwei verschiedene Zustände, da er zu einem Kasten gefaltet wird. Das fertige Produkt muss also, wenn schon nicht (wie in der Darstellung links) gezeichnet, so doch zumindest in der Phantasie vorgestellt werden. Zeichnung (oder Vorstellung) machen deutlich: Aus der Seitenlänge des herausgeschnittenen Dreiecks wird die Höhe des fertig gefalteten Kastens.

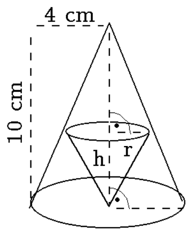
Bei A3 entzieht sich die zu minimierende Größe - die Gesamtkosten für das Material - der unmittelbaren geometrischen Darstellung, ist aber mit den gegebenen Preisangaben aus den geometrischen Daten des Kastens direkt zu berechnen. Da für die gesuchten Kosten die Flächeninhalte von Boden und Seiten benötigt werden, ist alternativ zu einer perspektivischen Darstellung wie der rechten als Skizze das links dargestellte Netz des quaderförmigen Gefäßes verwendbar.





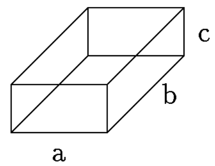
2. Schritt: Gegebene Werte eintragen, benötigte Formeln für die zu minimierende/maximierende Größe ermitteln und die Parameter aus den Formeln eintragen.

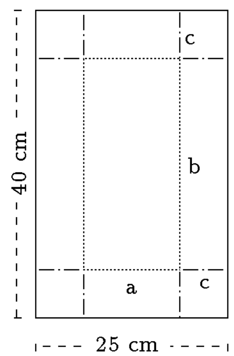
Zu A1: Die Maße des äußeren Kegels sind gegeben; da das Volumen des inneren Kegels extremal werden soll, wird die Formal für dieses Volumen benötigt. Dieses Volumen V berechnet sich aus Grundkreisradius r und Höhe h nach der Formel $V = \frac{1}{3}\, r^2\, \pi\, h$.



Die Voraussetzung, dass der kleine Kegel dem großen einbeschrieben wird, ist hierbei noch nicht verwendet. Erst durch die Benutzung dieser - in eine Gleichung zwischen r und h umzusetzenden - *Nebenbedingung* führt zu einer Darstellung von V in Abhängigkeit von nur einem Parameter, - und damit einer mit den erarbeiteten Mitteln der Funktionsdiskussion zu lösenden Aufgabe.

Zu A2: Die Maße des zu schneidenden und faltenden Papiers sind vorgegeben. Das Volumen V eines Quaders errechnet sich als Produkt von Länge, Breite und Höhe: $V = a{\cdot}b{\cdot}c$.





Die Größen a, b und c hängen alle drei von der Seitenlänge der ausgeschnittenen Quadrate ab; bezeichnet man diese Länge der Quadratseiten mit x, dann ergeben sich für die Länge, Breite und Höhe des gefalteten Kastens (Einheit cm wird weggelassen) folgende Ausdrücke:

$a = 40 - 2x, \quad b = 25 - 2x, \quad c = x.$

Durch Einsetzen in die Volumenformel erhält man daher $V = (\,40 - 2x\,) \cdot (\,25 - 2x\,) \cdot x$.

In dieser Formel tritt nur noch ein einziger Parameter, nämlich x, auf.

Zu A3: Bezeichnet man die kürzere Seite der Grundfläche mit a, dann hat die nach Voraussetzung doppelt so lange zweite Seite die Länge 2a.

Die Grundfläche hat somit den Inhalt $2a{\cdot}a$.

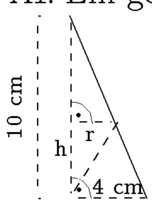
Bezeichnet nun h die Höhe, dann haben die Seitenflächen den Inhalt $a{\cdot}h$ bzw. $2a{\cdot}h$. Die vier Seitenflächen haben also insgesamt den Flächeninhalt $2{\cdot}(a{\cdot}h + 2a{\cdot}h)$, also $6a{\cdot}h$.

Die Materialkosten K (Ergebnis in Euro) errechnen sich damit aufgrund der angegebenen Preise für Typ B für den Boden und Typ S für die Seiten als $K = 2a^2 \cdot 0{,}5 + 6ah \cdot 0{,}6$.

Dabei ist die Nebenbedingung über das Volumen des Behälters noch nicht berücksichtigt.

3. Schritt: Umsetzen der Nebenbedingung(en) in eine (oder mehrere) Gleichungen mit den Parametern und Einsetzen in die Formel für die Zielgröße

Zu A1: Ein geeigneter ebener Schnitt durch die Achse der Kegel enthält die links dargestellte Strahlensatzfigur.



Nach dem zweiten Strahlensatz verhalten sich die Parallelenausschnitte zueinander so wie die entsprechenden (jeweils vom Scheitelpunkt des Zweistrahls aus gemessenen) Abschnitte auf einem der Strahlen.

Daher gilt $\frac{r}{4} = \frac{10 - h}{10}$, also $10r = 40 - 4h$, und somit $h = 10 - \frac{5}{2}r$.
Einsetzen in die Formel $V = \frac{1}{3} r^2 \pi h$ liefert $V = \frac{1}{3} r^2 \pi (10 - \frac{5}{2}r)$.

Zu A2: Hier liegen keine noch nicht verwendeten Nebenbedingungen mehr vor; die zu maximierende Größe V ist bereits mit einem einzigen Parameter beschrieben: $V = (40 - 2x) \cdot (25 - 2x) \cdot x$.

Zu A3: Da das Volumen des Behälters vorgegeben ist, müssen die Parameter in Beziehung zu diesem Volumen gesetzt werden.
Und da nach den gewählten Bezeichnungen die Grundfläche $2a^2$ und die Höhe h beträgt, ergibt sich für das Volumen $V = 2a^2 \cdot h$. Weil das Volumen 1 dm^3 (also 1000 cm^3) betragen soll und in der Einheit cm gerechnet wird, folgt daraus $2a^2 \cdot h$, also $h = \frac{1000}{2a^2}$.
Einsetzen in die Kostenformel: $K = 2a^2 \cdot 0{,}5 + 6\,a \cdot \frac{1000}{2a^2} \cdot 0{,}6$.
Vereinfachen ergibt schließlich: $K = a^2 + \frac{1800}{a}$.

<u>4. Schritt: Von der Formel für die Zielgröße zur Zielfunktion</u>

Nachdem der Ausdruck für die zu maximierende oder minimierende Größe, die *Zielgröße*. nur noch einen Parameter enthält, fehlt zum Übergang zur *Zielfunktion* nur noch die Festlegung des Definitionsbereich. Dieser ergibt sich in der Regel unmittelbar aus der Aufgabenstellung:

Zu A1: Der Radius des Grundkreises bei dem einbeschriebenen Kegel kann nicht negativ sein, er kann auch nicht größer als der Radius des großen Kegels sein. Somit liegt r zwischen 0 und 4. Auch die Werte $r = 0$ und $r = 4$ ergeben noch sinnvolle Deutungen: Hier entartet der einbeschriebene Kegel zu einer Strecke bzw. zu einer Kreisscheibe.
Die Zielfunktion v hat daher den Definitionsbereich $D_v = [\,0; 4\,]$ und (mit $x = r$) die Gleichung $v(x) = \frac{1}{3} x^2 \pi (10 - \frac{5}{2}x)$.

Zu A2: Damit noch eine Grundfläche des Quaders übrig bleibt, dürfen jeweils die Seitenlängen von zwei der abgeschnittene Quadrate nicht mehr als 25 cm verbrauchen, also darf $25 - 2x$ nicht negativ sein. Da auch die Seitenlängen der Quadrate nicht negativ sein können, liegt x zwischen 0 und 12,5. Die Grenzfälle $x = 0$ und $x = 12{,}5$ führen zu Ausartungen mit Volumen 0, stören also nicht die Maximalitätsbetrachtung.
Die Zielfunktion v hat daher den Def.-Bereich $D_v = [\,0; 12{,}5\,]$ und die Gleichung $v(x) = (40 - 2x) \cdot (25 - 2x) \cdot x$.

Zu A3: Die Grundfläche des Quaders kann beliebig groß sein, da sich dennoch immer noch eine positive (für sehr große Grundfläche sehr kleine) Höhe ergibt. Da Seitenlängen nicht negativ sein können, umfasst der Definitionsbereich der Kostenfunktion umfasst alle positiven Zahlen. Hier ergibt der Ausartungsfall $a = 0$ keinen Sinn, da dann durch keine Höhe ein positives Volumen erreicht werden kann.

Somit hat die Kostenfunktion den Definitionsbereich $D_k = \mathbb{R}_+$ und (mit $x = a$) die Gleichung: $k(x) = x^2 + \frac{1800}{x}$.

5. Schritt: Untersuchung der Zielfunktion auf Extremwerte

Vorbemerkung: In diesem Schritt ist der erforderliche Umfang der Untersuchung stark abhängig von den Vorkenntnissen. Während im Leistungskurs aufgrund der bekannten Sätze bereits aus der Betrachtung des Werteverlaufs auf die Existenz eine absoluten Hochpunkts (bei A1, A2) bzw. eines absoluten Tiefpunkts (bei A3) im Inneren des Definitionsbereichs geschlossen werden kann, so dass die jeweils einzige Nullstelle der Ableitung die Position des gesuchten Extremums angibt, muss im Grundkurs nach Auffinden der Stelle mit Steigung 0 des Funktionsgraphen zusätzlich mit Hilfe der zweiten Ableitung oder durch Verlaufsbetrachtung der ersten Ableitung die Extremwerteigenschaft an dieser Stelle nachgewiesen werden. Die nachfolgenden Ausführungen sind an den Voraussetzungen und Anforderungen des Grundkurses orientiert.

Zu A1: Aus $v(x) = \frac{1}{3}\, x^2\, \pi\, (10 - \frac{5}{2}x)$, also $v(x) = \frac{5}{6}\, \pi \cdot (4x^2 - x^3)$ folgt

$v'(x) = \frac{5}{6}\, \pi \cdot (8r - 3r^2) = \frac{5}{6}\, \pi \cdot r \cdot (8 - 3r)$ mit den Nullstellen 0 und $\frac{8}{3}$.

Da für $x = 0$ ein Ausartungsfall des Kegels eintritt, ist nur die Stelle $x = \frac{8}{3}$ zu untersuchen.

Folgende Begründungen sind geeignet:

Der Graph von v' ist eine nach unten geöffnete Parabel zweiter Ordnung, die bekanntlich (im Falle von zwei Nullstellen) an der rechten Nullstelle die x-Achse von oben kommend schneidet. Die Steigung des Graphen von v ist also vor der Stelle $\frac{8}{3}$ positiv und dahinter negativ. Die Funktion nimmt somit an dieser Stelle ein Maximum an.

oder

$v''(x) = \frac{5}{6}\, \pi \cdot (8 - 6r)$; $v''(\frac{8}{3}) = \frac{5}{6}\, \pi \cdot (8 - 6 \cdot \frac{8}{3}) = \frac{5}{6}\, \pi \cdot (8 - 16) < 0.$

Da die zweite Ableitung an der Nullstelle von v' negativ ist, liegt hier ein Maximum vor.

Zu A2: Aus $v(x) = (40 - 2x) \cdot (25 - 2x) \cdot x$, also $v(x) = 4x^3 - 130x^2 + 1000x$ folgt $v'(x) = 12x^2 - 260x + 1000$.

Als Lösungen der quadratischen Gleichung $12x^2 - 260x + 1000 = 0$ erhält man 5 und $\frac{20}{3}$; nur die Lösung 5 liegt im Definitionsbereich von v.

Wegen $v''(x) = 24x - 260$ ist $v(5) = 102 - 260 < 0$.

Die Funktion v nimmt daher an der Stelle 5 ihr Maximum an.

Zu A3: Aus $k(x) = x^2 + \frac{1800}{x}$ folgt $k'(x) = 2x - \frac{1800}{x^2}$.

$k'(x)$ wird null, wenn $x^3 = 900$ ist, also für $x = \sqrt[3]{900} \approx 9{,}65$.

Da bei Vergrößern von x bei Werten um 9,65 offensichtlich 2x wächst und $\frac{1800}{x^2}$ kleiner wird, ist $k'(x)$ vor der Nullstelle negativ und danach positiv; k nimmt also an der Stelle $\sqrt[3]{900}$ ein Minimum an.

6. Schritt: Das Präsentieren der Lösung

Da in der Aufgabenstellung in der Regel nicht nach Eigenschaften einer Funktion, sondern konkret nach Größen mit Einheiten gefragt ist, müssen nun noch die Ergebnisse auf die Aufgabenstellung bezogen werden:

Zu A1: Ohne dass die Frage in der Aufgabenstellung explizit formuliert ist, ist offensichtlich nach den Maßen des volumenmaximalen einbeschriebenen Kegels gefragt. Die Bearbeitung hat ergeben, dass der einbeschriebene Kegel für den Radius $r = \frac{8}{3}$ cm maximal wird.
Nach der bei Umformung der Nebenbedingung für die Höhe h erhaltenen Formel ($h = 10 - \frac{5}{2}r$) ergibt sich dann: $h = 10\text{ cm} - \frac{20}{3}\text{ cm} = \frac{10}{3}\text{ cm}$.
Der gesuchte volumenmaximale Kegel hat also den Radius 2,7 cm und die Höhe 3,3 cm (Endergebnisse auf mm gerundet).

Zu A2: Hier gab die Variable x die Seitenlänge der ausgeschnittenen Quadrate und damit die gesuchte Höhe des Kastens an. Das Ergebnis lautet also: **Der Kasten hat eine Höhe von 5 cm**.

Zu A3: In dieser Aufgabe sollten zwar die Materialkosten minimal werden, gefragt war aber nicht nach diesen Kosten, sondern nach den Abmessungen des Gefäßes.
Da mit x (=a) die die Länge (alles in cm) der kürzeren Seite der Grundfläche bezeichnet war, beträgt die längere Seite $2\cdot\sqrt[3]{900}$, während sich die Höhe als $1000 / (\sqrt[3]{900} \cdot 2\cdot\sqrt[3]{900})$ ergibt, also als $\frac{5}{9}\sqrt[3]{900}$.

Der Kasten mit minimalen Materialkosten hat also eine Grundfläche von ca. 9,65cm × 19,31 cm und eine Höhe von 5,36 cm.