Über die Stammfunktion zum Integral (Grundkurs)

0. Der Begriff der Stammfunktion

0.1 Das Umkehren von Prozessen ist oft nicht eindeutig möglich

Wenn man in der Mathematik Regeln kennengelernt hat, mit denen man zum Lösen einer Aufgabe von einer Station zur nächsten gelangt, stellt sich oft eine Frage in umgekehrter Richtung: Man will nicht mehr wissen, wohin man vom bekannten Ausgangspunkt gelangt, sondern aus dem erreichten Ziel rückwärts auf den Ausgangspunkt schließen. Beispiele:

(1) Man ist durch Quadrieren einer Zahl zu 121 gelangt. Welchen Wert hat die Ausgangszahl ?
(2) Der Sinus eines Winkels α beträgt 0,5; wie groß ist α ?
(3) Verdoppeln einer Zahl führt zu 1234; von welcher Zahl ist man ausgegangen?
(4) Eine quadratische Gleichung hat die Lösungen -3 und 4; wie lautet die Gleichung?
(5) Eine Funktion f hat an der Stelle x die Ableitung $f'(x) = 3x^2$. Wie lautet die Funktionsgleichung von f ?

An den Beispielen sieht man, dass es keineswegs selbstverständlich ist, dass sich ein geradliniger Lösungsweg wie Quadrieren, Sinusberechnen, Verdoppeln oder Lösen einer quadratischen Gleichung einfach umkehren lässt, denn außer beim Beispiel (3) ist die gestellte Frage nicht mehr eindeutig zu beantworten:

(1) Auch wenn man spontan vielleicht auf 11 als Ausgangszahl schließt, kann genau so gut -11 die Zahl gewesen sein, die quadriert wurde.
(2) Der Sinus des Winkels α ist die y-Koordinate jenes Punktes auf dem Einheitskreis, den man durch eine α-Drehung des Einheitspunktes $E(1|0)$ um den Ursprung erhält. Da es zwei Punkte auf dem Einheitskreis gibt, deren y-Koordinate den Wert 0,5 hat, gibt es auch zwei mögliche Ausgangswerte für α (nämlich 30° und 150°).
(3) Hier ist Ausgangszahl eindeutig bestimmt, da sich das Verdoppeln durch Halbieren rückgängig machen lässt. Die Ausgangszahl ist also 617.
(4) Neben der Gleichung $(x + 3)\cdot(x - 4) = 0$, also $x^2 - x - 12 = 0$ hat beispielsweise auch die Gleichung $-3x^2 + 3x + 36 = 0$ die Lösungsmenge $\{-3; 4\}$.

Nachdem bei drei der ersten vier Beispiele vom Ergebnis nicht eindeutig auf das Ausgangsobjekt zurückgeschlossen werden konnte, wundert es nicht, dass auch im Beispiel (5) die Funktion f nicht eindeutig bestimmt ist. Denn definiert man $f(x) = x^3$, dann erhält man zwar die gewünschte Ableitung, aber genauso führen die Funktionsgleichungen $f(x) = x^3 + 4711$ oder $f(x) = x^3 - \pi$ zur vorgegebenen Ableitung. Zwar hat die zuerst angegebene Funktion den Vorteil, dass sie am „einfachsten“ erscheint, aber das kann bei der Suche nach der Ausgangsfunktion f allenfalls zum Wunsch führen, dass gerade von dieser Funktion ausgegangen wurde.

0.2 Wenn man einen Prozess nicht eindeutig umkehren kann, sucht man nach der Gesamtheit der möglichen Ausgangsobjekte

Bei den Beispielen (1) bist (4) lassen sich die möglichen Ausgangsobjekte einfach beschreiben:

Bei (1) ist die Menge der Zahlen, deren Quadrat 121 ergibt, $\{ -11; 11 \}$. Einerseits haben diese Zahlen offenbar beide das verlangte Quadrat, andererseits kann es keine andere Zahl geben, deren Quadrat 121 ist. Denn nur – 11 und 11 haben den Betrag 11. Und eine Zahl mit kleinerem (bzw. größerem) Betrag als 11 führt auch zu einem Quadrat, das kleiner (bzw. größer) ist als 121. Die Menge der Ausgangsobjekte ist also vollständig anzugeben.

Auch beim Beispiel (2) gibt es - wie sich bereits aus dem obigen Text ergibt - nicht mehr als die zwei genannten Möglichkeiten für α, da die Gerade mit der Gleichung $y = 0{,}5$ (wie jede andere Gerade) mit dem Einheitskreis (wie mit jedem anderen Kreis) nicht mehr als zwei Punkte gemeinsam haben kann.

Bei (3) war als einzigem Beispiel die Ausgangszahl 617 eindeutig bestimmt.

Und bei (4) zeigt man, dass genau die Gleichungen der Form $ax^2 - ax - 12a = 0$ mit beliebigem $a \neq 0$ als Ausgangsgleichungen geeignet sind.

Schwieriger wird es dann beim Beispiel (5). Zwar wurde oben überlegt, dass jede Funktion mit einer Gleichung der Form $f(x) = x^3 + K$ (wobei K eine beliebige Konstante ist) zu der vorgegebenen Ableitung führt, es ist aber nicht klar, ob es nicht noch weitere Funktionen gibt, die an der Stelle x die Ableitung $3x^2$ haben.

0.3 Die Menge der Stammfunktionen

Passend für die in Beispiel (5) gesuchten Funktionen definiert man:
Wenn die Funktion F die Ableitung f hat (also $F' = f$ gilt), dann heißt F eine *Stammfunktion* zu f. Da es bei vorgegebenem f zu jeder gefundenen Stammfunktion F beliebig viele weitere gibt, die durch Addition einer Konstanten zu F entstehen, ist es nicht nur ungenau, sondern sogar falsch, die zuerst gefundene Funktion F als die Stammfunktion von f zu bezeichnen; es ist eben nur eine von vielen.

Um die Frage nach der Menge aller Stammfunktionen zu einer gegebenen Funktion f zu beantworten, muss man klären, ob es - nachdem man eine Stammfunktion F gefunden hat - nur noch solche Stammfunktionen zu f gibt, die durch Addition einer Konstanten zu F entstehen, oder ob es noch weitere gibt. Wie die folgende Überlegung zeigt, ist die letzte Frage zu verneinen.
Um das zu beweisen, ist zu zeigen, dass jede weitere Stammfunktion G durch Addition einer Konstanten aus F hervorgeht:
Wenn F und G beide Stammfunktionen zu f sind, dann gilt $G' = f$ und $F' = f$; somit folgt $G' = F'$; an jeder Stelle x ist also $G'(x) - F'(x) = 0$ und somit $(G - F)'(x) = 0$.
Da die Ableitung der Funktion $G - F$ an jeder Stelle 0 ist, steigt der Graph von $G - F$ nirgends und fällt nirgends; er verläuft also parallel zur x-Achse: Somit ist $G - F$ konstant.

Bemerkung für Leistungskursteilnehmer: Durch diesen dem Grundkurs angepassten, lediglich anschaulichen Schluss entsteht kein mathematisch wasserdichter Beweis. Zu einem solchen wird an dieser Stelle vielmehr der Mittelwertsatz der Differentialrechnung benötigt.

An jeder Stelle x hat also die Differenz $G(x) - F(x)$ den gleichen Wert; bezeichnet man diesen mit K, dann folgt $G(x) - F(x) = K$, also $G(x) = F(x) + K$. Die Funktion G geht also - wie zu zeigen war - aus F durch Addition einer Konstanten hervor.

Ergebnis: Ist F eine Stammfunktion zu einer gegebenen Funktion f, so ergibt sich die Menge aller Stammfunktionen zu f als Gesamtheit aller Funktionen mit einer Gleichung der Form $F_K(x) = F(x) + K$; dabei ist K eine beliebige reelle Zahl.

0.4 Stammfunktionen mit Anfangsbedingung

Die - mathematisch unerwünschte - Mehrdeutigkeit bei der Frage nach den Ausgangswerten eines mathematischen Prozesses lässt sich durch Nebenbedingungen beseitigen. Verlangt man bei Beispiel (1), dass die Ausgangszahl nicht-negativ ist, entfällt -11 und es ergibt sich als eindeutiger Ausgangswert 11. Eine solche Überlegung mit dem Ziel, Mehrdeutigkeit zu beseitigen, führt ja auch zur Definition der Quadratwurzel aus einer Zahl r als derjenigen nichtnegativen Zahl, deren Quadrat r ergibt.
Im Beispiel (2) führt die Einschränkung $-90^\circ < \alpha \leq 90^\circ$ (die z.B. der Taschenrechner verwendet) zu einem eindeutigen Ergebnis.
Verlangt man schließlich bei einer quadratischen Gleichung, dass sie *normiert* ist, also der Koeffizient vor x^2 den Wert 1 hat, dann ist auch hier die zu einem Lösungspaar gehörende Gleichung eindeutig festgelegt.

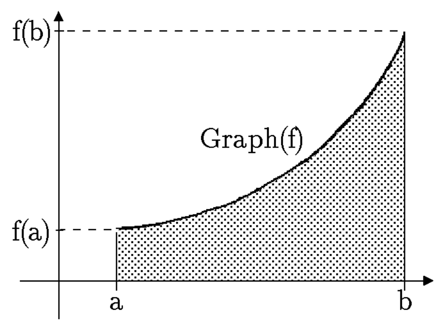
Um unter den möglichen Stammfunktionen zu f eine spezielle Funktion G festzulegen, genügt es, den Funktionswert von F an einer einzigen Stelle vorzugeben. Verlangt man etwa im Beispiel (5) von der Stammfunktion, dass sie an der Stelle 1 den Wert 5 hat, so muss einerseits für eine gewisse Konstante K gelten $F(x) = x^3 + K$, andererseits folgt aus $F(1) = 5$ durch Einsetzen $5 = 1^3 + K$, also $K = 4$. Die gesuchte Stammfunktion F hat also die Gleichung $F(x) = x^3 + 4$.
Die Vorgabe eines bestimmten Funktionswerts von F, durch die dann die gesuchte Stammfunktion eindeutig bestimmt ist, wird auch als *Anfangsbedingung* bezeichnet; dabei ist der vorgegebene Wert sehr oft der Funktionswert von F am linken Ende des Definitionsintervalls.

Beispiel (im Vorgriff auf das Hauptkapitel): Wenn für den im ersten Quadranten verlaufenden Graphen einer Funktion über dem Intervall [2; 5] mit $A(x)$ der Inhalt der Fläche bezeichnet wird, die durch den Graphen der Funktion, die x-Achse und die Parallelen zur y-Achse durch $(1|0)$ und $(x|0)$ bezeichnet wird, dann hat man die Anfangsbedingung $A(1) = 0$, da hier die betrachtete Fläche zu einer Strecke mit Flächeninhalt 0 ausartet. Mit Hilfe einer beliebigen Stammfunktion zu f lässt sich daher die Flächeninhaltsfunktion A bestimmen.

1 Das Integral

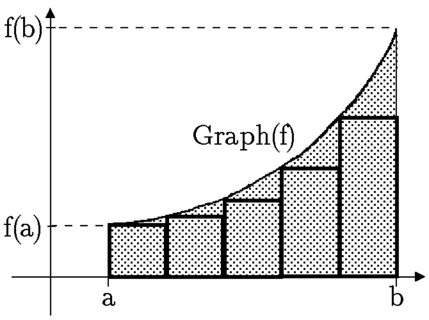
1.1 Das Problem der Flächeninhaltsberechnung und zwei Lösungsideen

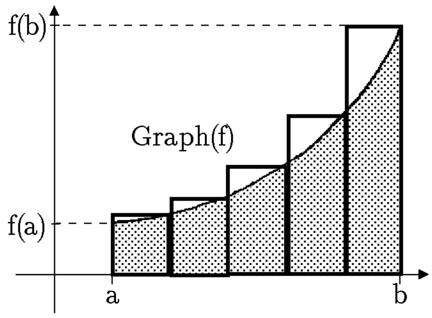
Während sich die Inhalte von Rechtecken einfach mit Hilfe der Seitenlängen bestimmen lassen, und man die gewonnenen Formeln erfolgreich weiterentwickeln kann, um die Inhalte von Parallelogrammen, Trapezen, Dreiecken oder allgemeinen n-Ecken zu bestimmen, stößt die Flächenberechnung bei nicht geradlinig begrenzten Flächen auf Schwierigkeiten.
Hier soll nun zunächst der Spezialfall untersucht werden, dass die Fläche im ersten Quadranten des Koordinatensystems liegt, wobei die Fläche im Süden durch die x-Achse, im Osten und Westen durch Parallelen zur y-Achse und im Norden durch den Graphen einer monoton wachsenden Funktion f begrenzt wird. Bezeichnet man die x-Werte der vertikalen Begrenzungen der Fläche mit a und b, dann betrachtet man also eine monoton zunehmende Funktion f mit Definitionsbereich [a; b], wie sie mit einem Beispiel in der Skizze dargestellt ist.



Zur Bestimmung des Inhalts der Fläche unter der Kurve werden nun zwei Lösungsideen angegeben:

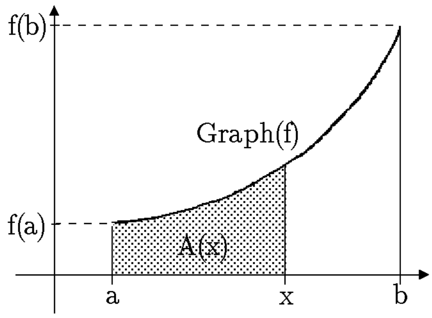
<u>Lösungsidee 1</u>: Man teilt das Intervall [a; b] in 5, 10, 20 oder allgemein n Teilintervalle auf und konstruiert über jedem Teilintervall zwei Rechtecke: Eines, das ganz von der Fläche bedeckt wird („einbeschrieben“), und eines, das den gesamten Teil der Fläche über seiner Grundseite bedeckt („umbeschrieben“). Die Skizzen zeigen das Ergebnis des Verfahrens für eine Aufteilung in fünf Teilintervalle, links mit einbeschriebenen und rechts mit umbeschriebenen Rechtecken.





Bei der Summierung der Rechteckflächeninhalte erhält man links einen zu kleinen und rechts einen zu großen Wert für den Inhalt der markierten Fläche. Man kann aber durch Vergrößerung der Anzahl der Intervalle erreichen, dass diese beiden Näherungswerte beliebig nahe beieinander liegen und damit den zwischen beiden liegenden Flächeninhalt beliebig genau ausrechnen.
Dieser Lösungsansatz wird im Grundkurs zur theoretischen Weiterentwicklung nicht ausgeführt, sondern lediglich zur näherungsweisen Integralberechnung, z.B. mit Hilfe eines Tabellenkalkulationsprogramms, verwendet.

<u>Lösungsidee 2:</u> Man untersucht, wie sich der Flächeninhalt verändert, wenn man - beginnend bei a - die rechte vertikale Flächenbegrenzung nach rechts bewegt. Dazu führt man eine Flächeninhaltsfunktion A ein, die an jeder Stelle x aus [a; b] den Inhalt der von x-Achse, Kurve und den beiden vertikalen Geraden durch $(a|0)$ und $(x|0)$ begrenzten Fläche angibt.
Von dieser Flächeninhaltsfunktion kennt man schon einen Wert, nämlich A(a), weil im Falle x = a die Fläche zu einer Strecke ausartet, ihr Inhalt also 0 ist.
Kennt man die Funktion A, kann man auch den in der ursprünglichen Aufgabenstellung gesuchten Flächeninhalt angeben, denn dieser ergibt sich ja als A(b).



Nach den oben dargestellten Ergebnissen über Stammfunktionen kann man die Funktion A genau angeben, wenn man

1) zur Ableitung A’ von A eine Stammfunktion gefunden hat, und
2) den Wert von A an einer Stelle kennt (Anfangsbedingung).

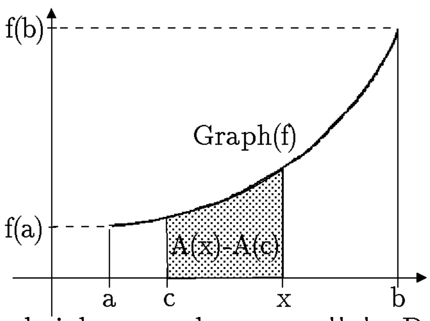
Die zweite Bedingung ist mit $A(a) = 0$ erfüllt; wenn man also die Ableitung von A kennt und zu dieser eine Stammfunktion bestimmen kann, erhält man damit auch die Flächeninhaltsfunktion A und somit auch den gesuchten Flächeninhalt A(b).

Nachfolgend wird ausgeführt, wie man die Ableitung von A erhält.

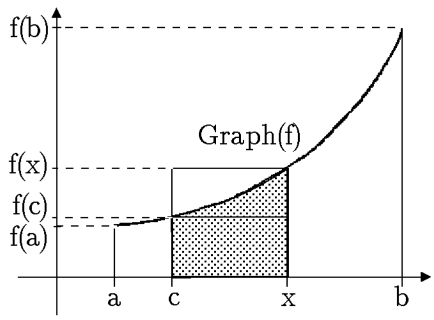
1.2 Die Ableitung der Flächeninhaltsfunktion

Die Ableitung einer Funktion an einer Stelle c des Definitionsbereichs ergibt sich bekanntlich als Grenzwert des an der Stelle c gebildeten Differenzenquotenten für x gegen c.
Zu untersuchen ist also der Differenzenquotient $\frac{A(x) - A(c)}{x - c}$.

Für die geometrische Darstellung sind die Fälle x > c und x < c zu unterscheiden. Die nachfolgenden Ausführungen betrachten den Fall $x \geq c$. Der zweite - hier nicht mehr ausgeführte - Fall verläuft ähnlich, wobei lediglich bei der Division durch den (dann negativen) Faktor x – c die Kleinerzeichen in Größerzeichen übergehen.



Der Zähler des Differenzenquotienten, also A(x) – A(c) gibt die Differenz der Flächen unter der Kurve von a bis x bzw. von a bis c an, lässt sich also in der links skizzierten Weise darstellen.
Da die Funktion f als monoton wachsend vorausgesetzt wurde, folgt wegen $a \leq c < x \leq b$ die Ungleichungskette $f(a) \leq f(c) \leq f(x) \leq f(b)$.
Nun lässt sich der links dargestellte Flächeninhalt A(x) – A(c) nach unten und oben einschließen durch das größte einbeschriebene und das kleinste umbeschriebene achsenparallele Rechteck. Diese Rechtecke haben beide die gemeinsame Grundseite der Länge x – c und die Höhen f(c) bzw. f(x), also die beiden Flächeninhalte $f(c)\cdot(x - c)$ und $f(x)\cdot(x - c)$.



Da der Inhalt der markierten Fläche zwischen diesen beiden Flächeninhalten liegt, ergibt sich die Ungleichung $f(c)\cdot(x - c) \leq A(x) - A(c) \leq f(x)\cdot(x - c)$.

Dividiert man nun durch die positive Zahl x – c, gelangt man in der Mitte der Ungleichungskette zu dem Differenzenquotienten von A, dessen Grenzwert für x gegen c ja die gesuchte Ableitung A'(c) angibt:

$$f(x) \leq \frac{A(x) - A(c)}{x - c} \leq f(c).$$

Der für die Stelle c gebildete Differenzenquotient von A liegt also immer zwischen f(x) und f(c). Strebt nun x gegen c, so strebt f(x) gegen f(c), und dem eingeschlossenen Differenzenquotienten bleibt nichts anderes übrig, als ebenfalls gegen f(c) zu streben.

Bemerkung für Leistungskursteilnehmer: Die hier als gesichert hingenommene Tatsache, dass f(x) gegen f(c) strebt, wenn x gegen c strebt, ist - abgesehen davon, dass auch dieses „Streben“ hier nicht exakt definiert wird, - keineswegs selbstverständlich; vielmehr wird diese Eigenschaft, wenn sie vorliegt, als *Stetigkeit von f an der Stelle c* bezeichnet. Da die im Grundkurs behandelten Funktionen nahezu alle in diesem Sinne stetig sind, wird der Begriff hier nicht thematisiert und auf die Exaktheit, die eigentlich in der Mathematik geboten ist, verzichtet.

Dass der Differenzenquotient $\frac{A(x) - A(c)}{x - c}$ für x gegen c den Grenzwert f(c) hat, bedeutet aber nichts anderes, als dass die Funktion A an der Stelle c die Ableitung f(c) hat.

Es gilt also $A'(c) = f(c)$, und da c eine beliebige Stelle des Intervalls [a; b] war, allgemein $A'(x) = f(x)$ für jede Stelle $x \in [\, a; b\,]$. Die Ableitung von A ist also f.

1.3 Von der Ableitung zur Flächeninhaltsfunktion

Aus der Ableitung f lässt sich leider nicht unmittelbar auf die Funktion A schließen, selbst wenn man eine Funktion F mit der Ableitung f gefunden hat. Denn wie weiter oben dargestellt, existieren zusammen mit einer Stammfunktion unendlich viele andere, und nur eine davon ist die gesuchte Funktion A.
Wenn man allerdings eine Stammfunktion F zu f gefunden hat, gelangt man mit Hilfe der Anfangsbedingung $A(a) = 0$ leicht zu der gesuchten Funktion A. Denn da sich die Stammfunktionen A und F nur um eine - zunächst noch unbekannte - Konstante K unterscheiden, muss für die Funktionsgleichungen von F und A an jeder Stelle x aus dem Intervall $[\, a; b\,]$ gelten: $A(x) = F(x) + K$.

Einsetzen von $x = a$ liefert daraus	$A(a) = F(a) + K$,
also	$0 = F(a) + K$
und somit	$K = -F(a)$.

Da man nun K kennt, hat man die Funktionsgleichung von A: $A(x) = F(x) - F(a)$.

Und für den gesuchten Flächeninhalt A(b) ergibt sich somit: $A(b) = F(b) - F(a)$.

Damit ergibt sich die nachstehend zusammengefasste Vorgehensweise, die für den Spezialfall einer monoton wachsenden Funktion hergeleitet wurde, aber für alle hinreichend einfachen Funktionen f gilt, deren Graph oberhalb der x-Achse verläuft:

Gegeben: Eine Funktion f über einem abgeschlossenen Intervall $[\, a; b\,]$, die keine negativen Werte annimmt.

Gesucht: Der Inhalt der Fläche, die von der x-Achse, den Geraden mit den Gleichungen $x = a$ und $x = b$, und dem Graphen der Funktion eingeschlossen wird.

Lösung: Erster Schritt: Finde eine Stammfunktion F zu f, also eine Funktion F, deren Ableitung f ist.
Zweiter Schritt: Berechne $F(b) - F(a)$.
Das ist dann der gesuchte Flächeninhalt.

Beispiel: Bestimme den Flächeninhalt der Standardschablone für die Normalparabel.

Lösung: Legt man die Schablone symmetrisch zur y-Achse so in ein Koordinatensystem, dass die nicht-gekrümmte Kante auf der x-Achse liegt, dann beschreibt die Kontur den Graphen der über $[\, -3{,}5; 3{,}5\,]$ definierten Funktion f mit der Gleichung $f(x) = 12{,}25 - x^2$.
Eine geeignete Stammfunktion F hat die Gleichung $F(x) = 12{,}25x - \frac{1}{3}\,x^3$.

Bezeichnet man den gesuchten Flächeninhalt mit A, so ergibt sich daher

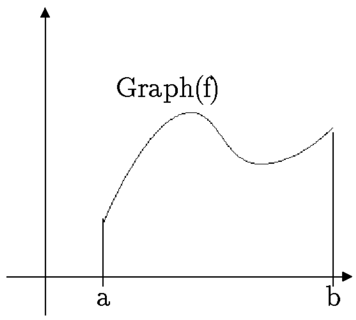
$$\begin{aligned} A &= F(3{,}5) - F(-3{,}5) \\ &= 12{,}25 \cdot 3{,}5 - \tfrac{1}{3}\,3{,}5^3 - \left(12{,}25 \cdot (-3{,}5) - \tfrac{1}{3}\,(-3{,}5^3)\right) \\ &= 12{,}25 \cdot 3{,}5 - \tfrac{1}{3}\,3{,}5^3 - 12{,}25 \cdot 3{,}5 - \tfrac{1}{3}\,3{,}5^3 \\ &= 12{,}25 \cdot 7 - \tfrac{2}{3}\,3{,}5^3 \quad = \tfrac{343}{6}\,. \end{aligned}$$

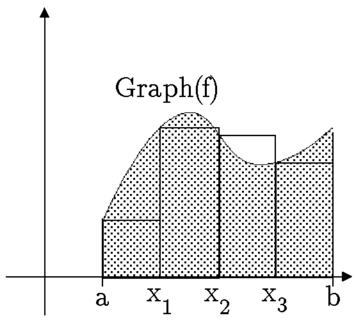
Der gesuchte Flächeninhalt beträgt also ca. $57{,}17\ \mathrm{cm}^2$.

2 Vom Flächeninhalt zum Integral

2.1 Die Integralnotation

Nach den bisher erzielten Ergebnissen lässt sich der Flächeninhalt zwischen x-Achse, zwei vertikalen Geraden und dem nirgends unterhalb der x-Achse verlaufenden Graphen einer hinreichend einfachen Funktion f berechnen, wenn man eine Stammfunktion F zu f finden kann. Findet man eine solche Stammfunktion nicht und ist mit einer näherungsweisen Berechnung des Flächeninhalts zufrieden, kann man auf das oben als Lösungsidee 1 vorgestellte Verfahren zurückgreifen. Allerdings wird im allgemeinen die flächenbegrenzende Funktion nicht monoton sein, so dass sich nicht so einfach wie im obigen Beispiel eine obere und eine untere Näherung für den Flächeninhalt angeben lassen. Stattdessen begnügt man sich zu jeder Zerlegung des Definitionsintervalls in Teilintervalle mit einer einzigen Näherung, bei der man die obere Seite des jeweiligen Rechtecks durch irgendeinen Punkt des Graphen über dem jeweiligen Intervall legt. Die Inhalte der Rechtecke sind dann mal größer und mal kleiner als der zum jeweiligen Streifen gehörende Inhalt der betrachteten Fläche. Im dargestellten Beispiel ist das Intervall [a; b] zur besseren Übersichtlichkeit in nur vier Teilintervalle zerlegt; als Höhe des Rechtecks wurde jeweils der Funktionswert am linken Intervallende gewählt. Alle vier Rechtecke haben Grundseiten der gleichen Länge, nämlich ein Viertel der Länge des Definitionsintervalls, also $\frac{b-a}{4}$.





Als Summe S der vier Rechteckinhalte ergibt sich somit

$$S = f(a)\cdot \frac{b-a}{4} + f(x_1)\cdot \frac{b-a}{4} + f(x_2)\cdot \frac{b-a}{4} + f(x_3)\cdot \frac{b-a}{4}.$$

Kürzt man den Abstand zweier aufeinanderfolgender Teilungspunkte des Definitionsintervalls mit $\triangle x$ ab und bezeichnet die erste Stelle bei der Intervalleinteilung, also a, mit x_0, so ist S eine Summe aus vier Summanden, die alle die Form $f(x_i)\cdot dx$ haben. Unter Verwendung des Summenzeichens lässt sich S also abgekürzt in der Form $S = \sum\limits_{i=0}^{3} f(x_i)\cdot\triangle x$ schreiben.

Um zu erreichen, dass die Abweichung des mit Hilfe der Rechteckflächen errechneten Näherungswert vom genauen Inhalt der Fläche kleiner wird, vergrößert man die Anzahl der Teilintervalle, indem man statt 4 Teilintervallen 10, 100, 1000000 oder allgemein notiert n Teilintervalle wählt.

Man kann nun (allerdings nicht im Grundkurs) zeigen, dass bei den hinreichend einfachen Funktionen, also z.B. bei den ganzrationalen Funktionen, diese Näherungssummen mit wachsendem n gegen den gesuchten Flächeninhalt streben. Um dies auch symbolisch auszudrücken notiert man den Grenzwert der oben betrachteten Summen als $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ (lies: „Integral von f(x) über dem Intervall von a bis b“). Dabei kann man das Integralzeichen $\int$ als Erinnerung an das Summenzeichen deuten. Die Werte unter und über dem Integralzeichen geben Anfangs- und Endpunkt des jeweiligen Definitonsintervalls der Funktion f an und heißen *untere und obere Integrationsgrenze.*

Das Ergebnis von 1.3 lässt sich dann auch so formulieren:
Ist f eine nirgends negative Funktion über dem Intervall [a; b] und ist F eine Stammfunktion zu f, dann gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)\ .$$

2.2 Die Ausdehnung des Integralbegriffs

Die angegebene Berechnung des Integrals $\int_a^b f(x)\,dx$ mit Hilfe einer Stammfunktion von f liefert ein Verfahren, das sich formal nicht nur unter der bisher immer gestellten Bedingung durchführen lässt, dass der Graph von f nirgends unterhalb der x-Achse verläuft. Vielmehr ist das Vorzeichenverhalten von f für das Auffinden einer Stammfunktion F und das Berechnen von F(b) − F(a) ohne Bedeutung. Man definiert daher allgemein und unabhängig vom Vorzeichenverhalten von f das Integral von f über einem vorgegebenen Intervall:

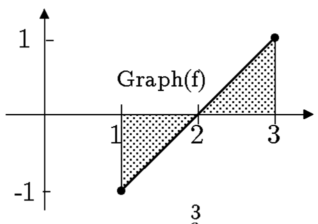
Ist F eine Stammfunktion zu der über [a; b] definierten Funktion f, dann definiert man:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)\ .$$

Bemerkung für Leistungskursleser: Es handelt sich hier lediglich um eine Arbeitsdefinition für den Grundkurs, durch welche die Begriffe Integrierbarkeit und Integral nicht mathematisch exakt erklärt werden.

2.3 Der Zusammenhang zwischen Integral und Flächeninhalt

Betrachtet man als einfaches Beispiel eines nicht nur oberhalb der x-Achse verlaufenden Graphen die Verbindungsstrecke der Punkte $A(1|-1)$ und $B(3|1)$, also den Graphen der über [1; 3] definierten linearen Funktion f mit $f(x) = x - 2$ und bestimmt das Integral, so ergibt sich aufgrund des Stammfunktionsterms $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x$ für das Integral:



$$\int_1^3 f(x)\,dx = F(3) - F(1) = \frac{1}{2}3^2 - 2{\cdot}3 - \left(\frac{1}{2}1^2 - 2{\cdot}1\right) = \frac{9}{2} - 6 - \frac{1}{2} + 2) = 0.$$

Da offensichtlich eine Fläche zwischen Graph und x-Achse vorhanden ist, gibt das Integral hier also nicht den Flächeninhalt an.

Man beachte also, dass im Gegensatz zu der speziellen Einführung des Integrals gilt:

Im allgemeinen sind Flächeninhalt und Integral nicht das gleiche !

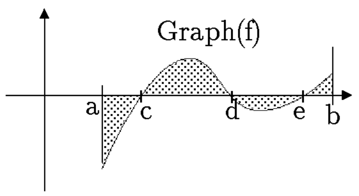
Aufgrund der Herleitung ergibt sich: Nur dann gibt das Integral einer auf dem Intervall [a; b] definierten Funktion f den Inhalt des Flächenstücks zwischen x-Achse, Graph von f und den vertikalen Geraden durch $(a|0)$ und $(b|0)$ an, wenn der Graph von f nirgends unterhalb der x-Achse verläuft.
Um den Inhalt von Flächenstücken unterhalb der x-Achse zu berechnen, stellt man sich vor, dass der Graph von f an der x-Achse gespiegelt wird - das bedeutet, dass man von Graph(f) zu Graph(g) mit $g = -f$ übergeht. Dabei wird der Flächeninhalt nicht verändert, und lässt sich nun als Integral von g berechnen. Wenn F eine Stammfunktion zu f ist, dann ist − F eine Stammfunktion zu − f, also zu g. Der gesuchte Flä-

cheninhalt ergibt sich im Fall eines ganz unterhalb der x-Achse verlaufenden Graphen von f somit als $-A(b)-\big(-A(a)\big)$, also als $-\big(A(b)-A(a)\big)$; das ist aber gerade die Gegenzahl des Integrals von f.
Somit folgt: Für eine über [a; b] definierte Funktion f, deren Graph nirgends oberhalb der x-Achse verläuft, ergibt sich der Inhalt des Flächenstücks zwischen x-Achse, Graph(f) und den vertikalen Geraden durch Anfangs- und Endpunkt des Graphen als Gegenzahl des Integrals von f.
Bezeichnet man den Inhalt der eingeschlossenen Fläche mit I, so gilt also für die über [a; b] definierte Funktion f :

Falls $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a; b]$ ist $I = \int_a^b f(x)\,dx$,
und falls $f(x) \leq 0$ für alle $x \in [a; b]$ ist $I = -\int_a^b f(x)\,dx$.

Wenn also für eine über einem Intervall [a; b] gegebene Funktion der Inhalt der Fläche zwischen Kurve und x-Achse berechnet werden soll, darf nicht einfach das Integral von f über [a; b] als Lösung angegeben werden, sondern es muss zunächst das Vorzeichenverhalten von f untersucht werden. Nach Zerlegung des Definitionsbereichs in Teilintervalle, über denen der Graph nirgends negativ bzw. nirgends positiv ist, kann der Flächeninhalt als Summe der entsprechenden - und mit den richtigen Vorzeichen versehenen - Integralen berechnet werden.

Beispiel: Der Graph der dargestellten Funktion verläuft über den Intervallen [a; c] und [d; e] nirgends oberhalb der x-Achse und über den Intervallen [c; d] und [e; b] nirgends unterhalb der x-Achse.



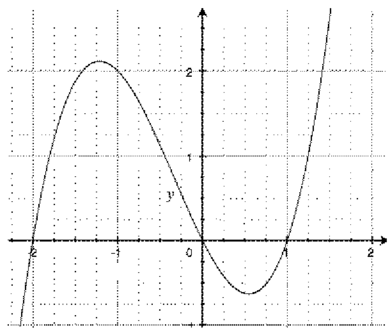
Der Inhalt I der markierten Fläche errechnet sich somit als

$$I = -\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^d f(x)\,dx - \int_d^e f(x)\,dx + \int_e^b f(x)\,dx\,.$$

Ein konkretes Aufgabenbeispiel:

Berechne den Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen der Funktion f mit der Gleichung $f(x) = (x+2)\cdot x\cdot(x-1)$ und der x-Achse.

<u>Lösung</u>: Die Funktion f ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert, die Nullstellenmenge ist an der Faktorzerlegung des Funktionsterms abzulesen: $\mathbf{O}_f = \{-2; 0; 1\}$. Die betrachtete Fläche liegt also über dem Intervall [– 2; 1].



Da der Graph über]–2; 0[oberhalb der x-Achse verläuft und über dem Intervall] 0; 1 [unterhalb der x-Achse verläuft, ergibt sich für den Inhalt I der von Kurve und x-Achse eingeschlossenen Fläche:

$I = \int_{-2}^{0} f(x)\,dx - \int_0^1 f(x)\,dx$.

Ausmultiplizieren des Funktionsterms f(x) ergibt $f(x) = x^3 + x^2 - 2x$.

Ein geeigneter Stammfunktionsterm ist $F(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2$.

Für den gesuchten Flächeninhalt ergibt sich also: $I = F(0) - F(-2) - \big(F(1) - F(0)\big)$.

$I = 2F(0) - F(-2) - F(1) = 2\cdot 0 - \big(4 - \frac{1}{3}\cdot 8 - 4\big) - \big(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - 1\big) = \frac{37}{12}$.

Der gesuchte Flächeninhalt beträgt also ca. 3,08 Flächeneinheiten.

4. Anhang: Bemerkungen zu einer Notationsvereinfachung

Das Berechnen eines Integrals mit Hilfe einer Stammfunktion des Integranden bedeutet immer, dass die Differenz von zwei Funktionswerten zu ermitteln ist. Wenn die Funktion mit einem Namen (z.B. F) versehen ist, lässt sich die Differenz der Werte an den Stellen b und a kurz als F(b) – F(a) notieren.
In vielen Fällen ist die Funktion aber lediglich durch ihren Funktionsterm gegeben, so dass die Bildung der Differenz der Funktionswerte an den Intervallgrenzen schreibtechnisch sehr aufwendig wird. Ist z.B. $F(x) = -x^4 - 11x^3 + 5x^2 - 32x$, so ergibt sich bei Intervallgrenzen a und b der Ausdruck

$$-b^4 - 11b^3 + 5b^2 - 32b - \left(-a^4 - 11a^3 + 5a^2 - 32a\right).$$

Um hier den Schreibaufwand zumindest bei der Übergangsrechnung vom Integral aus zu verkürzen, kann man die Differenz zweier Werte einer Funktion F an den Stellen a und b als $[\,F(x)\,]_a^b$ abkürzen.

Beispiele: (1) $[\,x^2 - 3x\,]_a^b = b^2 - 3b - \left(a^2 - 3a\right)$

(2) $$\begin{aligned}[\,\tfrac{3}{4}x^4 - 3x^2 + 8x\,]_1^4 &= \tfrac{3}{4}\cdot 4^4 - 3\cdot 4^2 + 8\cdot 4 - \left(\tfrac{3}{4}\cdot 1^4 - 3\cdot 1^2 + 8\cdot 1\right)\\ &= 3\cdot 4^3 - 3\cdot 4^2 + 8\cdot 4 - \left(\tfrac{3}{4} - 3 + 8\right)\\ &= 176 - \tfrac{23}{4}\\ &= 170{,}25\,.\end{aligned}$$

Mit dieser Notation lässt sich die Regel zum Berechnen eines Integrals folgendermaßen formulieren (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung):

Ist f eine (gemäß dem Grundkurs einfache) Funktion, deren Definitionsbereich das Intervall [a; b] umfasst, und ist F eine Stammfunktion zu f, dann berechnet sich das Integral von f über dem Intervall [a; b] folgendermaßen: $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$.

<u>Warnung:</u> Wie schon oben eindringlich betont, gibt das Integral nur unter besonderen Voraussetzungen (Graph der Funktion nirgends unterhalb der x-Achse) den Inhalt der Fläche zwischen Kurve und x-Achse an.

Aufgabenbeispiel:

Berechne den Inhalt der Fläche, die von der x-Achse und dem Graphen der Funktion f mit $f(x) = 3x^2 - 6x$ berandet wird.

<u>Lösung:</u> Der Graph von f ist eine nach oben geöffnete Parabel. Aus der Faktorzerlegung $3x^2 - 6x = 3x\cdot(x-2)$ liest man die Nullstellen 0 und 2 ab. Die Fläche, deren Inhalt zu berechnen ist, gehört also zum Intervall [0; 2] und liegt unterhalb der x-Achse. Bezeichnet man den gesuchten Flächeninhalt mit I und beachtet, dass man mit $x^3 - 3x^2$ einen geeigneten Stammfunktionsterm zu f hat, so ergibt sich:

$$I = -\int_0^2 f(x)\,dx = -\int_0^2 \left(3x^2 - 6x\right)dx = -[x^3 - 3x^2]_0^2$$

$$I = -\left(\left(2^3 - 3\cdot 2^2\right) - \left(0^3 - 3\cdot 0^2\right)\right) = -(8 - 12 - 0) = 4\,.$$

Der Inhalt der Fläche beträgt also 4 (Flächeneinheiten).

Löffler, 2006-11-09