Lineare Abbildungen und Gleichungssysteme

Klaus-R. Loeffler

1 Lineare Abbildungen

1.1 Definition: Lineare Abbildung

Es wird vorausgesetzt, dass V und W Vektorräume sind.

Eine Abbildung f von V in W heißt dann linear, wenn für beliebige Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ aus V und für eine beliebige reelle Zahl r stets die folgenden beiden Gleichungen gelten:

1. $f(\vec{a}+\vec{b}) = f(\vec{a}) + f(\vec{b})$,
2. $f(r\vec{a}) = rf(\vec{a})$.

Die erste angegebene Eigenschaft wird als Additivität, die zweite angegebene Eigenschaft als Homogenität bezeichnet. Eine Abbildung eines Vektorraums V in einen Vektorraum W ist also genau dann linear, wenn sie additiv und homogen ist.

1.2 Beispiele linearer Abbildungen

1. Es sei V der Vektorraum der auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbaren Funktionen, W der Vektorraum aller auf ganz $\mathbb{R}$ erklärten reellwertigen Funktionen. Definiert man dann die Abbildung f durch $f(\vec{g}) = \vec{g}'$, ordnet also jeder Funktion ihre Ableitung zu, dann ist diese Abbildung linear. Hierbei ergeben sich Additivität und Homogenität aus den entsprechenden Eigenschaften differenzierbarer Funktionen, die als Summenregel und Faktorregel formuliert worden sind.

2. Es sei V der Vektorraum der auf [0;2] stetigen Funktionen, W der Vektorraum der reellen Zahlen. Definiert man für $\vec{g}$ aus V dann $f(\vec{g})$ als Integral von $\vec{g}$ über dem Intervall [0;2], dann ist diese Abbildung linear. Hierbei ergeben sich Additivität und Homogenität aus den entsprechenden Eigenschaften des Integrals.

3. Es sei $V = W = \mathbb{R}$, c sei eine beliebige reelle Zahl. Definiert man für x aus V dann $f(\mathrm{x})$ als $c \cdot \vec{x}$, dann ist diese Abbildung linear. Dabei ergibt sich die Additivität aus dem Distributivgesetz und die Homogenität aus dem Assoziativgesetz und dem Kommutativitätsgesetz der Multiplikation in $\mathbb{R}$.

4. Es sei $V = W = \mathbb{R}^3$, ferner sei eine Ursprungsgerade gegeben. Man definiert nun die Abbildung f von V in W auf folgende Weise: Zu einem Urbild $\vec{x}$ betrachte man den Punkt X, dessen Ortsvektor $\vec{x}$ ist, und fälle von X aus das Lot auf die Gerade. Der Ortsvektor des erhaltenen Fußpunktes sei $f(\vec{x})$. Der Nachweis, dass die so definierte Abbildung f linear ist, wird als Übungsaufgabe empfohlen.

1.3 Eigenschaften linearer Abbildungen

Nachfolgend sei stets f eine lineare Abbildung eines Vektorraums V in einen Vektorraum W. Die Nullvektoren dieser Räume werden mit $\vec{o}_V$ bzw. mit $\vec{o}_W$ bezeichnet.

1. $f(\vec{o}_V) = \vec{o}_W$
2. Für jeden Vektor $\vec{a}$ aus V gilt: $f(-\vec{a}) = -f(\vec{a})$.
3. Wenn $B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, ..., \vec{b}_n)$ eine Basis von V ist, und $\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3, ..., \vec{c}_n$ sind (in dieser Reihenfolge) die Bilder der Basisvektoren $\vec{b}_i$ bei der Abbildung f, dann gilt für einen Vektor $\vec{x}$, der bezüglich der Basis B die Koordinaten $(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ hat: $f(\vec{x}) = x_1\vec{c}_1 + x_2\vec{c}_2 + x_3\vec{c}_3 + ... + x_n\vec{c}_n$.
4. Wenn die Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, ..., \vec{a}_k$ linear abhängig sind, sind auch $f(\vec{a}_1), f(\vec{a}_2), f(\vec{a}_3), ..., f(\vec{a}_k)$ linear abhängig.
5. Die Menge aller Bilder $f(\vec{x})$ von Vektoren $\vec{x}$ aus V bildet einen Vektorunterraum von W.
6. Die Menge aller Vektoren $\vec{x}$ aus V, deren Bild der Nullvektor ist, für die also $f(\vec{x}) = \vec{o}_W$ gilt, bildet einen Vektorunterraum von V.

Die Beweise dieser Eigenschaften werden als Übungsaufgaben empfohlen. Zum Beweis benötigt man keine Ideen, sondern nur die Kenntnis der Definitionen für lineare Abbildungen, für den Vektorraum und für lineare Abhängigkeit sowie das Untervektorraumkriterium.

1.4 Der Vektorraum $L(V, W)$

Die Menge aller linearen Abbildungen eines Vektorraums V in einen Vektorraum W wird (hier) mit $L(V, W)$ bezeichnet; für $f, g \in L(V, W), r \in \mathbb{R}$ definiert man die Abbildungen $f + g$ und rf durch

$$\bigwedge_{\vec{x}\in V} \bigwedge_{r\in\mathbb{R}} \left(\ (f+g)(\vec{x}) = f(\vec{x}) + g(\vec{x}) \ \wedge \ (rf)(\vec{x}) = r \ f(\vec{x}) \ \right) .$$

Wie man unter Verwendung der Eigenschaften des Vektorraums und der linearen Abbildung nachrechnet, ist mit dieser Addition und dieser Multiplikation mit Skalaren $L(V, W)$ ein Vektorraum.
Sind die Vektorräume V und W endlichdimensional ($\dim(V) = n \in \mathbb{N}, \ \dim(W) = m \in \mathbb{N}$), dann ist der Vektorraum $L(V, W)$ isomorph zum Vektorraum $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.
Man erhält einen Isomorphismus, indem man ausgehend von Basen $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, ..., \vec{b}_n)$ und $(\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3, ..., \vec{c}_m)$ des Vektorraums V bzw. des Vektorraums W die zu $f \in L(V, W)$ gehörende Abbildung $\varphi \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ wie folgt konstruiert:

$$\varphi\left((x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)^T\right) = \left((y_1, y_2, y_3, \ldots, y_m)^T\right) \Leftrightarrow f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\vec{b}_i\right) = \sum_{j=1}^{m} y_j\vec{c}_j .$$

Die Untersuchung linearer Abbildungen zwischen endlichdimensionalen Vektorrümen lässt sich daher auf die Untersuchung linearer Abbildungen zwischen den Koordinatenräumen $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ reduzieren.

1.5 Definitionen von Bild und Kern linearer Abbildungen

Die unter der fünften und sechsten Eigenschaft linearer Abbildungen angegebenen Vektorräume werden als *Bild von* f und als *Kern von* f bezeichnet. Das Bild von f (nicht zu verwechseln mit dem Bild eines einzelnen Vektors) ist also die Gesamtheit aller Bildvektoren, der Kern von f ist die Gesamtheit aller Urbilder des Nullvektors $\vec{o}_W$:

- $\text{Bild}(f) := \{\vec{w} \in W | \bigvee_{\vec{v} \in V} f(\vec{v}) = \vec{w}\}$.

  Ist V endlichdimensional mit einer Basis $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \ldots, \vec{a}_n)$, ist $\text{Bild}(f)$ die lineare Hülle von $\{f(\vec{a}_1), f(\vec{a}_2), f(\vec{a}_3), \ldots, f(\vec{a}_n)\}$.

- $\text{Kern}(f) := \{v \in V | f(\vec{v}) = \vec{o}_W\}$.

Wie mit Hilfe des Untervektorraumkriteriums zu zeigen ist, sind $\text{Kern}(f)$ und $\text{Bild}(f)$ Untervektorräume von V bzw. W. Die einfachen Nachweise wurden bereits oben als Übung empfohlen.

1.6 Definitionen von Rang und Defekt linearer Abbildungen

Wie oben erwähnt (und vom Leser hoffentlich auch überprüft) wurde, sind Kern und Bild einer linearen Abbildung von V in W Untervektorräume von V bzw. W. Die Dimensionen dieser Räume werden als *Rang* bzw. als *Defekt* der linearen Abbildung f bezeichnet:

- $\text{rg}(f) := \dim(\text{Bild}(f))$
- $\text{def}(f) := \dim(\text{Kern}(f))$

Mit Hilfe des Austauschsatzes von Steinitz (siehe dort) beweist man den folgenden Dimensionssatz:

1.7 Dimensionssatz für lineare Abbildungen

Ist f eine lineare Abbildung eines endlichdimensionalen Vektorraums V in einen Vektorraum W, so gilt:

- $\text{rg}(f) + \text{def}(f) = \dim(V)$.

Wie aus der Analysis bekannt ist, bezeichnet man eine Funktion f mit Definitionsbereich V und Zielbereich W als *injektiv*, wenn zu verschiedenen Urbildern a, b aus V stets auch verschiedene Bilder $f(a)$ und $f(b)$ gehören. Die Funktion f heißt *surjektiv*, wenn alle Elemente des Zielbereichs auch als Werte erfasst werden, also:

- f ist genau dann injektiv, wenn für alle a, b aus V gilt: Aus $f(a) = f(b)$ folgt $a = b$.
- f ist genau dann surjektiv, wenn es für jedes y aus W ein x aus V mit $f(x) = y$ gibt.

Von den folgenden beiden Sätzen über eine lineare Abbildung f eines Vektorraums V in einen Vektorraum W ist der erste eine unmittelbare Folgerung aus den Definitionen, während der zweite eines Beweises bedarf:

1. f surjektiv $\longleftrightarrow \text{Bild}(f) = W$
2. f injektiv $\longleftrightarrow \text{Kern}(f) = \vec{o}_V$.

1.8 Lineare Gleichungen

Unter einer *linearen Gleichung* wird nachfolgend eine Gleichung der Form $f(\vec{x}) = \vec{d}$ verstanden, wobei f eine lineare Abbildung eines Vektorraums V in einen Vektorraum W und d ein Element von W ist. Wenn bekannt ist, dass $\vec{d}$ der Nullvektor von W ist, wir die Gleichung als *homogen*, andernfalls als *inhomogen* bezeichnet.
Die Lösungsmenge L einer linearen Gleichung wird erklärt als

$$L = \{\vec{x} \in V \mid f(\vec{x}) = \vec{d}\}.$$

Wenn die vorgelegte lineare Gleichung homogen ist, erhält man als Lösungsmenge also den Kern der zugehörigen Abbildung f.
Die Elemente der Lösungsmenge werden als *Lösungen* der Gleichung bezeichnet. Die Gleichung heißt *eindeutig lösbar*, wenn die Lösungsmenge genau ein Element enthält. Ist die Lösungsmenge leer, wird die Gleichung auch als *unerfüllbar* bezeichnet.

Der Sprachgebrauch ist allerdings uneinheitlich. Manchmal ist mit dem Begriff *Lösung* die gesamte Lösungsmenge bezeichnet, während dann die Elemente der Lösungsmenge als Partikularlösungen bezeichnet.

Der Begriff *unlösbar* sollte nicht verwendet werden, wenn es keine Lösungen gibt, sondern nur, wenn sich die Lösungsmenge nicht ermitteln lässt.

Da der Kern einer linearen Abbildung ein Untervektorraum des Urbildraums V ist, hat eine homogene Gleichung genau dann eine eindeutige Lösung, wenn gilt $L = \{\vec{o}_V\}$.
Umgekehrt gehört bei jeder linearen Gleichung der Nullvektor des Urbildraums zur Lösungsmenge.
Ist $\vec{x}_0$ eine Lösung der linearen Gleichung $f(\vec{x}) = \vec{d}$, so erhält man die Lösungsmenge der Gleichung als

$$L = \vec{x}_0 + \text{ Kern}(f) \qquad \left(= \{\vec{x} \in V \mid \bigvee_{\vec{y} \in \text{Kern}(f)} \vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{y}\} \right).$$

Denn

$$\vec{x} \in L \Leftrightarrow f(\vec{x}) = \vec{d} \Leftrightarrow f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) \Leftrightarrow f(\vec{x} - \vec{x}_0) = \vec{o}_V \Leftrightarrow (\vec{x} - \vec{x}_0) \in \text{Kern}(f).$$

Eine erfüllbare lineare Gleichung hat also genau dann eine eindeutige Lösung, wenn die zugehörige homogene Gleichung nur die triviale Lösung $\vec{o}_V$ hat.

1.9 Existenz- und Eindeutigkeitssatz

Die Vielzahl der linearen Abbildungen eines Vektorraums in einen zweiten wird dadurch überschaubarer, dass bereits wenige Paare (Urbildvektor; Bildvektor) die Abbildung festlegen. Andererseits kann man immer eine Abbildung, die lediglich auf einer linear unabhngigen Teilmenge eines Vektorraums erklärt ist, zu einer linearen Abbildung des ganzen Raumes fortsetzen. Es gilt der folgende Satz:

Voraussetzung: V sei ein Vektorraum mit einer Basis $B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, ..., \vec{b}_n)$,
W sei ein Vektorraum,
$\vec{d}_1, \vec{d}_2, \vec{d}_3, ..., \vec{d}_n)$ seien n beliebigeVektoren aus W .

Behauptung: Es gibt genau eine lineare Abbildung f von V in W, die für jedes i aus 1, 2, 3, ..., n den Vektor $\vec{b}_i$ in den Vektor $\vec{d}_i$ überführt.

Beweis: Zunächst wird die Eindeutigkeit gezeigt.

Jeder Vektor $\vec{x}$ aus V hat bezüglich der vorgelegten Basis B ein eindeutig bestimmte Koordinaten r_i $(i = 1, 2, 3, ..., n)$. Wenn f eine lineare Abbildung mit $f(\vec{b}_i) = \vec{d}_i$ ist, dann gilt:

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) = f(r_1\vec{b}_1 + r_2\vec{b}_2 + r_3\vec{b}_3 + ... + r_n\vec{b}_n) &= r_1 f(\vec{b}_1) + r_2 f(\vec{b}_2) + r_3 f(\vec{b}_2 + ... + r_n f(\vec{b}_n) \\ &= r_1\vec{d}_1 + r_2\vec{d}_2 + r_3\vec{d}_3 + ... + r_n\vec{d}_n. \end{aligned}$$

Wenn also eine lineare Abbildung die Voraussetzungen erfüllt, dann ist sie durch die Vorgabe der Bilder einer Basis bereits eindeutig bestimmt.

Es ist nun zu zeigen, dass die oben definierte Abbildung f linear ist.

Von den nachzuweisenden Eigenschaften wird hier nur die Addititvität gezeigt; der Nachweis der Homogenität erfolgt entsprechend.

Für beliebige $\vec{x}, \vec{y}$ aus V ist zu zeigen, dass $f(\vec{x}+\vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$ gilt.

Zum Nachweis seien $(r_1, r_2, ..., r_n)$ die Koordinaten von $\vec{x}$ und $(s_1, s_2, ..., s_n)$ die Koordinaten von $\vec{y}$. Dann hat $\vec{x}+\vec{y}$ die Koordinaten $(r_1+s_1, r_2+s2, ..., r_n+s_n)$.

$$\begin{aligned} f(\vec{x}+\vec{y}) - f(\vec{x}) - f(\vec{y}) &= (r_1+s_1)\vec{d_1} + (r_2+s_2)\vec{d_2} + ... + (r_n+s_n)\vec{d_n} \\ &\quad -(r_1\vec{d_1} + r_2\vec{d_2} + ... + r_n\vec{d_n}) - (s_1\vec{d_1} + s_2\vec{d_2} + ... + s_n\vec{d_n}) = \vec{o}. \end{aligned}$$

Da f additiv und (wie analog zu zeigen ist) homogen ist, ist f linear.

Damit ist der Beweis abgeschlossen.

1.10 Lineare Abbildungen von $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$ und Matrizen

Für die nachfolgenden Überlegungen seien m und n positive ganze Zahlen; f wird als lineare Abbildung von $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$ vorausgesetzt. Nach dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz ist f dadurch eindeutig bestimmt, dass man n Elemente des Raumes $\mathbb{R}^m$ als Bilder der Vektoren einer Basis von $\mathbb{R}^n$ vorgibt. Diese Bilder seien mit $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \vec{s}_3, ..., \vec{s}_n$ bezeichnet.
Wählt man als Basis von $\mathbb{R}^n$ die sogenannte kanonische Basis $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, ..., \vec{e}_n)$, wobei $\vec{e}_i$ derjenige Vektor aus $\mathbb{R}^n$ ist, dessen i-te Komponente 1 ist, während alle anderen Komponenten den Wert 0 haben, dann sind die Bilder beliebiger Vektoren $\vec{x}$ aus $\mathbb{R}^n$ besonders einfach zu berechnen. Denn bezeichnet man die Komponenten von $\vec{x}$ mit x_i, $(i = 1, 2, 3, ..., n)$ so hat man

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) = f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} &= f(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + ... + x_n\vec{e}_n) = x_1 f(\vec{e}_1) + x_2 f(\vec{e}_2) + ... + x_n f(\vec{e}_n) \\ &= x_1\vec{s}_1 + x_2\vec{s}_2 + ... + x_n\vec{s}_n \end{aligned}$$

Da diese Abbildung durch die Vektoren $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \vec{s}_3, ..., \vec{s}_n$ vollständig festgelegt ist, lässt sich sich mit Hilfe der Komponenten der Vektoren $\vec{s}_i$ beschreiben $(i = 1, 2, 3, ..., n)$. Bezeichnet man die Komponenten des Vektors $\vec{s}_i$ mit $c_{1i}, c_{2i}, c_{3i}, ..., c_{mi}$, dann ergibt sich bei der Notierung der Vektoren $\vec{s}_i$ als Spalten in einem rechteckigen Koeffizientenschema die folgende Matrix M_f der linearen Abbildung f :

$$M_f = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \cdots & c_{2n} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \cdots & c_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

In der i-ten Spalte der Matrix stehen also die Komponenten des Bildvektors von $\vec{e}_i$.
Schematisch lässt sich daher M_f auch als $(f(\vec{e}_1)f(\vec{e}_2)f(\vec{e}_3)...f(\vec{e}_n))$ schreiben, wenn man beim Eintragen der Komponentendarstellung der Vektoren innerhalb von M_f die Vektorklammern weglässt.

1.10.1 Der Rang einer Abbildungsmatrix

Die folgenden Überlegungen nutzen aus, dass die Koordinatenräume mit dem Standardskalarprodukt euklidische Vektorräume sind und das orthogonale Komplement eines Unterraums U des Raums $\mathbb{R}^n$ die Dimension $n - \dim(U)$ hat.

Da die lineare Hülle $\langle \vec{s}_1, \vec{s}_2, \vec{s}_3, ..., \vec{s}_n \rangle$ der Spaltenvektoren $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \vec{s}_3, ..., \vec{s}_n$ gerade $\text{Bild}(f)$ ergibt, stimmt der Rang der Abbildung, also die Dimension von $\text{Bild}(f)$ mit der Maximalzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren der zugehörigen Matrix M_f überein; er wird daher auch als *Spaltenrang* der Matrix bezeichnet.
Bezeichnet man die für $j = 1, 2, 3 \ldots, m$ als Vektor aufgefasste Zeile $(c_{j1}, c_{j2}, c_{j3}, \ldots, c_{jn})$ mit $\vec{z}_j$, dann gilt für jeden Vektor $\vec{x}$ aus V folgende Äquivalenz:

$$\vec{x} \in \text{Kern}(f) \Leftrightarrow f(\vec{x}) = \vec{o}_W \Leftrightarrow \bigwedge_{j \in \{1,2,3,\ldots,m} \vec{z}_j * \vec{x} = 0 \Leftrightarrow x \in \langle \vec{z}_1, \vec{z}_2, \vec{z}_3, \ldots, \vec{z}_m \rangle^{\perp}.$$

Somit folgt: $\text{def}(f)) = m - \dim(\langle \vec{z}_1, \vec{z}_2, \vec{z}_3, \ldots, \vec{z}_m \rangle)$. Mithin ist nach dem Dimensionssatz die Maximalzahl linear unabhängiger Zeilenvektoren, der *Zeilenrang* der Matrix M_f, gleich dem Rang von f und hat somit den gleichen Wert wie der Spaltenrang der Matrix. Dieser gemeinsame Wert wird als Rang der Matrix bezeichnet.

2 Lineare Gleichungssysteme

Zu positiven ganzen Zahlen n und m und reellen Zahlen d_i und c_{ij} $(i = 1, 2, 3, \ldots, m; j = 1, 2, 3, \ldots, n)$ wird das folgende System linearer Gleichungen betrachtet:

$$\bigwedge_{i \in \{1,2,3,\ldots,m\}} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j = d_i.$$

Bei Notation unter Verwendung der Matrixschreibweise hat man die äquivalente Darstellung

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \cdots & c_{2n} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \cdots & c_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_m \end{pmatrix},$$

bzw. mit

$$C := \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \cdots & c_{2n} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \cdots & c_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}, \quad \vec{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n; \quad \vec{d} := \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

wird daraus $C \cdot \vec{x} = \vec{d}$.
Ist also f die lineare Abbildung von $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$ mit der Matrix C, dann sind die Lösungen des Gleichungssystems die Urbilder von $\vec{d}$ unter der Abbildung f. Wenn es also Lösungen des Systems gibt, dann hat die Lösungsgesamtheit - wie weiter oben ausgeführt - die Form $\vec{x}_0 + \text{Kern}(f)$.

2.1 Die erweiterte Koeffizientenmatrix

Ebenso wie für eine kompakte Darstellung des linearen Gleichungssystems auch als Lösungshilfsmittel ist die folgende Notation des Systems durch seine *erweiterte Koeffizientenmatrix* zweckmäßig:

$$K := \left(\begin{array}{ccccc|c} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \cdots & c_{2n} & d_2 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \cdots & c_{3n} & d_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} & \cdots & c_{mn} & d_m \end{array} \right)$$

Das Ziel ist nun, die erweiterte Koeffizientenmatrix so umzuformen, dass die Lösungsmenge bei den einzelnen Umformungsschritten invariant ist, sich aber nach einigen Schritten unmittelbar aus der Matrix ablesen lässt. Ein solches Ablesen der Lösungsmenge ist z.B. möglich, wenn folgende Form erreicht wurde:

$$\left(\begin{array}{ccccccccc|c} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & u_{1,r+1} & u_{1,r+2} & \dots & u_{1,n} & w_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & u_{2,r+1} & u_{2,r+2} & \dots & u_{2,n} & w_2 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & u_{3,r+1} & u_{3,r+2} & \dots & u_{3,n} & w_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & u_{r,r+1} & u_{r,r+2} & \dots & u_{r,n} & w_r \end{array}\right)$$

Dabei ist möglicherweise eine Verkleinerung der Zeilenzahl (von m auf r) erfolgt, weil eine eventuell auftretende Nullzeile keine zusätzliche Bedingung darstellt und daher im Verlauf der Umformungen weggelassen wird.
An der erweiterten Koeffizientenmatrix lassen sich nun folgende Ergebnisse ablesen:

1. Das System hat Lösungen; als spezielle Lösung liest man ab: $\vec{x}_0 = (w_1, w_2, w_3, \dots, w_r, 0, 0, \dots, 0)^T$.
2. Der Rang der Matrix beträgt r; der Kern der zugehörigen linearen Abbildung (die Lösungsmenge des homogenen Gleichungssystems) hat somit die Dimension $n - r$, wir also von $n - r$ linear unabhängigen Vektoren aufgespannt.
3. Die folgenden $n-r$ Vektoren sind offensichtlich linear unabhängig und Lösungen des homogenen Systems:

$$\vec{y}_1 = \begin{pmatrix} -u_{1,r+1} \\ -u_{2,r+1} \\ -u_{3,r+1} \\ \vdots \\ -u_{r,r+1} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{y}_2 = \begin{pmatrix} -u_{1,r+2} \\ -u_{2,r+2} \\ -u_{3,r+2} \\ \vdots \\ -u_{r,r+2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{y}_3 = \begin{pmatrix} -u_{1,r+3} \\ -u_{2,r+3} \\ -u_{3,r+3} \\ \vdots \\ -u_{r,r+3} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \vec{y}_{n-r} = \begin{pmatrix} -u_{1,n} \\ -u_{2,n} \\ -u_{3,n} \\ \vdots \\ -u_{r,n} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wenn sich also die erweiterte Koeffizientenmatrix durch zulässige Umformungen auf die oben dargestellte Form bringen lässt, kann man die Lösungsmenge angeben als $L = \vec{x}_0 + \langle \vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3, \dots, \vec{y}_{n-r} \rangle$.

2.2 Die zulässigen Umformungen der Koeffizientenmatrix

Damit eine Umfomung zulässig ist, muss sie die Lösungsmenge unverändert lassen. Dies ist offensichtlich bei den beiden folgenden elementaren Zeilenumformungen der erweiterten Koeffizientenmatrix der Fall:

- Vertauschen von zwei Zeilen.
- Streichen einer Zeile, die nur aus Nullen besteht.
- Ersetzen einer Zeile durch das s-fache dieser Zeile ($s \in \mathbb{R}^*$).
- Ersetzen einer Zeile durch die Summe aus dieser Zeile und dem s-fachen einer anderen Zeile ($s \in \mathbb{R}$).

2.3 Beispiele zu Lösungsermittlung durch Umformungen der Koeffizientenmatrix

(B 1) Löse das Gleichungssystem $x + 3y + 3z = 6 \ \wedge \ 2x - y + z = 2$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 6 \\ 2 & 5 & 1 & | & 8 \end{pmatrix} \to^{(1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 6 \\ 0 & 1 & -5 & | & -4 \end{pmatrix} \to^{(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 13 & | & 14 \\ 0 & 1 & -5 & | & -4 \end{pmatrix}$$

(1) Ersetze Zeile II durch die Summe aus Zeile II und dem (-2)-fachen von Zeile I;

Kurznotation: $II \leftarrow II - 2 \cdot I$

(2) $I \leftarrow I - 2 \cdot II$

An der letzten Matrix ist die Lösungsmenge L abzulesen:

$$L = \begin{pmatrix} 14 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -13 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle .$$

(B 2) Löse die Gleichung $x + 2y + 3z = 6.$

Da die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix $(1 \ 2 \ 3 \ | \ 6)$ bereits die erwünschte Endform hat, lässt sich die Lösungsmenge sofort ablesen:

$$L = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle .$$

(B 3) Löse das Gleichungssystem $2x + 3y + z + w = 4 \ \wedge \ 5x + 6y - 4z + 6w = 0$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 & | & 4 \\ 5 & 6 & -4 & 6 & | & 0 \end{pmatrix} \to^{(1)} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 & | & 4 \\ 0 & -3 & -13 & -8 & | & -20 \end{pmatrix}$$

$$\to^{(2)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -12 & -4 & | & -16 \\ 0 & -3 & -13 & -8 & | & -20 \end{pmatrix} \to^{(3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 & -2 & | & -8 \\ 0 & 3 & 13 & 8 & | & 20 \end{pmatrix}$$

(1) $II \leftarrow 2 \cdot II - 5 \cdot I$; (2) $I \leftarrow I - 2 \cdot II$; (3) $I \leftarrow \frac{1}{2} \cdot I$; $II \leftarrow (-1) \cdot II$

An der letzten Matrix ist die Lösungsmenge L abzulesen:

$$L = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -24 \\ 20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 18 \\ -13 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle .$$

(B 4) Löse das Gleichungssystem $x + 2y = 3 \ \wedge \ 2x + 3y = 4 \wedge \ 3x + 4y = 5 \wedge \ 4x + 5y = 6$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 3 \\ 2 & 3 & | & 4 \\ 3 & 4 & | & 5 \\ 4 & 5 & | & 6 \end{pmatrix} \to^{(1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 3 \\ 0 & -1 & | & -2 \\ 0 & -2 & | & -4 \\ 0 & -3 & | & -6 \end{pmatrix} \to^{(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & -1 \\ 0 & -1 & | & -2 \\ 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \to^{(3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & -1 \\ 0 & 1 & | & 2 \end{pmatrix}$$

(1) $II \leftarrow II - 2 \cdot I$; $III \leftarrow III - 3 \cdot I$; $IV \leftarrow IV - 4 \cdot I$;

(2) $I \leftarrow I + 2 \cdot II$; $III \leftarrow III - 2 \cdot II$; $IV \leftarrow IV - 3 \cdot II$;

(3) $II \leftarrow (-1) \cdot II$; Nullzeilen III und IV weglassen.

An der letzten Matrix ist die Lösungsmenge L abzulesen: $L = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

Im letzten Beispiel sind bei der Umformung Nullzeilen aufgetreten. Solche Zeilen darf man bei der Umformung einfach weglassen, da die Bedingung $\sum_{i=1}^{n} 0 \cdot x_i = 0$ für jeden Vektor $(x_i)_1^n$ erfüllt ist. Tritt andererseits eine Zeile $(0\ 0\ 0\ \ldots 0|d)$ auf mit $d \neq 0$, kann das Verfahren abgebrochen werden, da das System dann keine Lösung hat.

2.4 Übungsaufgaben zur elementaren Zeilenumformung

Nachfolgend sind jeweils die erweiterte Koeffizientenmatrix und (zur Kontrolle) das Ergebnis nach Ausführung der Umformungsschritte angegeben. Als Übung sind die hier nicht angegebenen Einzelumformungen durchzuführen.

(U 1) $$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -8 & -1 \\ -9 & -5 & -8 & 6 \\ 5 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -1 \end{array}\right).$$

(U 2) $$\left(\begin{array}{cccc|c} -72 & 0 & -29 & -7 & 1 \\ 58 & -9 & 33 & 8 & 1 \\ 49 & -8 & 29 & 7 & 1 \\ 6 & -2 & 4 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -66 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 335 \end{array}\right).$$

(U 3) $$\left(\begin{array}{ccccc|c} -7 & -1 & -5 & -5 & 8 & -4 \\ -8 & -1 & 4 & 2 & -7 & -25 \\ 7 & -6 & 4 & 6 & -3 & 16 \\ -2 & -8 & -4 & 1 & 4 & -6 \\ 8 & 3 & 9 & 5 & -4 & 41 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right).$$

(U 4) $$\left(\begin{array}{cccc|c} -6 & 9 & 8 & -7 & -1 \\ -3 & 2 & 9 & -8 & -5 \\ 0 & 5 & -10 & 9 & 9 \\ -3 & 7 & -1 & 1 & 4 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 15 & 0 & -65 & 58 & 43 \\ 0 & 5 & -10 & 9 & 9 \end{array}\right).$$

(U 5) $$\left(\begin{array}{cc|c} 8 & -10 & 18 \\ 2 & -9 & 11 \\ 7 & -10 & 17 \\ -8 & 3 & -11 \\ 4 & 1 & 3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

(U 6) $$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 6 & 2 & 8 & 10 \\ 9 & 3 & 5 & 3 & 3 \\ 7 & 0 & 4 & -1 & 5 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 7 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 21 & -1 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

3 Anhang: Das Invertieren einer Matrix

Das Verfahren der elementaren Zeilenumformungen liefert fast unmittelbar einen Algorithmus zum Invertieren einer (regulären) Matrix, wenn man folgendes beachtet: Im Aufbau der Matrix einer linearen Abbildung von $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$ bilden die n Spalten der Matrix die Bilder der Einheitsvektoren des Raumes $\mathbb{R}^n$ (der kanonischen Basis $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$).

Für die Matrix der Umkehrabbildung (bei $m = n$ und Regularität der Matrix) sind die Spalten also die Urbilder der Einheitsvektoren, so dass sich die i-te Spalte $\vec{b}_i$der Umkehrmatrix zur Matrix A als Lösung der Gleichung $A\vec{x}_i = \vec{e}_i$ ergibt $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$ ergibt.
Löst man also simultan für die reguläre Koeffizientenmatrix A die n Gleichungssyteme $A\vec{x}_i = \vec{e}_i$ $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$, so erhält man als Lösungen gerade die Spalten der Matrix A^{-1}.