Orthogonalisieren und Normieren in einem euklidischen Vektorraum

Klaus-R. Loeffler

1 Das Motiv

Zu jeder Basis $(\vec{a}_i)_{i=1}^n$ eines n-dimensionalen Vektorraums V und zu jeder Folge $(\vec{c}_i)_{i=1}^n$ in einem Vektorraum W gibt es nach dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz für lineare Abbildungen genau eine lineare Abbildung von V in W, bei welcher für $i = 1, 2, 3, \cdots, n$ der Vektor $\vec{a}_i$ in den Vektor $\vec{c}_i$ übergeführt wird.
Will man nun bei vorgegebener Basis $(\vec{a}_i)$ und Folge $(\vec{c}_i)$ und dadurch festgelegter linearer Abbildung f von V in W zu einem Vektor $\vec{x}$ aus V den Bildvektor $\vec{f(\vec{x})}$ bestimmen, so braucht man zunächst die Darstellung von $\vec{x}$ in der Basis $(\vec{a}_i)$. Die - eindeutig bestimmten - Koeffizienten $r_1, r_2, r_3, \cdots, r_n$ der Darstellung $\vec{x} = \sum_{i=1}^n r_i\vec{a}_i$ werden (bekanntlich) als Koordinaten von $\vec{x}$ bezüglich der Basis $(\vec{a}_i)$ bezeichnet.

1.1 Übungsaufgabe 1.1

Gegeben ist die Basis $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \\ 16 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 27 \\ 64 \end{pmatrix} \right)$ des Raumes $\mathbf{R}^4$.

Bestimme bezüglich dieser Basis die Koordinaten des Vektors $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Bemerkungen zur Übungsaufgabe 1.1

Die Berechnung der Koordinaten erfolgt durch Lösen des entsprechenden linearen Gleichungssystems. Im vorliegenden Fall ergibt sich als Systemdeterminante die bekannte Vandermondsche Determinante, so dass die Lösung mit Hilfe der Cramerschen Regel vom Aufwand her akzeptabel ist; günstiger ist vom Rechenaufwand her im allgemeinen das Lösungsverfahren mit elementaren Zeilenumformungen der erweiterten Koeffizientenmatrix. Für diejenigen, bei denen kein Übungsbedarf beim Lösen linearer Gleichungssysteme mehr besteht, kann natürlich auch ein Programm (z.B. Matrix) diese Arbeit übernehmen.

Besonders einfach gestaltet sich die Berechnung der Koordinaten eines Vektors, wenn der betrachtete Vektorraum euklidisch ist und die vorliegende Basis orthogonal und normiert (kurz: orthonormiert) ist, wenn also alle Vektoren der Basis die Norm 1 haben und je zwei verschiedene Basisvektoren orthogonal sind.

1.2 Übungsaufgabe 1.2

Weise nach, dass ($\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$) eine orthogonale Basis des Raumes $\mathbf{R}^3$ ist, und normiere sie.

Bemerkung zur Übungsaufgabe 1.2

> Wenn $(\vec{a}_i)_{i=1}^n$ eine orthonormierte Basis des euklidischen Vektorraums V und $\vec{x}$ ein Vektor aus V ist, dann erhält man für ein beliebiges i aus $\{1, 2, 3, ..., n\}$ den Koeffizienten r_i in der Darstellung $\vec{x} = \sum_{i=1}^n r_i\vec{a}_i$ ganz einfach als Wert des Skalarprodukts $\vec{x} * \vec{a}_i$.
>
> Denn da für verschiedene Indizes i, j aufgrund der Orthogonalität der Basis gilt $\vec{a}_i * \vec{a}_j = 0$, liefert skalare Multiplikation der Gleichung $\vec{x} = \sum_{i=1}^n r_i\vec{a}_i$ mit $\vec{a}_j$ die Gleichung $\vec{x} * \vec{a}_j = r_j\vec{a}_j * \vec{a}_j$. Und da die Basis als normiert vorausgesetzt wurde, ist $\vec{a}_j * \vec{a}_j = ||\vec{a}_j||^2 = 1$, also $\vec{x} * \vec{a}_i = r_i$.

1.3 Übungsaufgabe 1.3

Verwende die durch Lösen von Übungsaufgabe 2 erhaltene orthonormierte Basis des Raumes $\mathbf{R}^3$ und bestimme die Koordinaten der drei Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 15 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$ bezüglich dieser Basis.

Bemerkung zur Übungsaufgabe 1.3

> Die Bearbeitung der Übungsaufgaben hat (hoffentlich) gezeigt, um wie viel geringer der Rechenaufwand ist, wenn man von einer orthonormierten Basis ausgehen kann. Die Vorteile einer solchen speziellen Basis (auch die kanonische Basis des Raumes $\mathbf{R}^n$ ist orthonormiert !) zeigen sich über das Beispiel der Koordinatenbestimmung hinaus noch an vielen anderen Stellen.

Als direkte Folge der oben dargestellten einfachen Methode der Koordinatenbestimmung sieht man die lineare Unabhängigkeit von paarweise orthogonalen Vektoren, falls unter ihnen nicht der Nullvektor ist. Denn aus der Darstellung $\sum_{i=1}^n r_i\vec{a}_i = \vec{o}$ ergibt sich für jeden Index j durch skalare Multiplikation mit $\vec{a}_j$ sofort $r_i\vec{a}_i * \vec{a}_j = 0$, wegen $\vec{a}_j * \vec{a}_j > 0$ folgt $r_j = 0$; die Darstellung des Nullvektors als Linearkombination paarweise orthogonaler (und von $\vec{o}$ verschiedener) Vektoren ist also nur auf triviale Weise möglich, d.h.: Die Vektoren sind linear unabhängig.
Es wäre also gut, ein Verfahren zu haben, mit dem man ausgehend von einer beliebigen Basis eines endlichdimensionalen euklidischen Vektorraums V diese schrittweise zu einer orthonormierten Basis von V umformen könnte. Die grundlegende Idee zu diesem Verfahren verdeutlicht der folgende Abschnitt am anschaulichen Beispiel des Raumes $\mathbf{R}^3$.

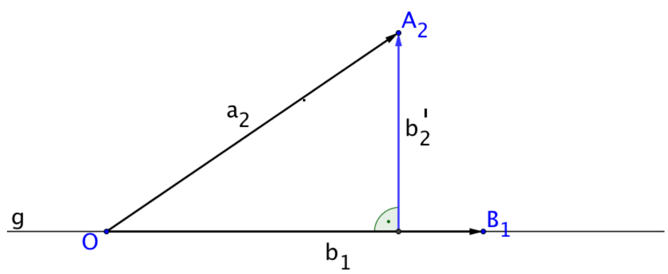
2 Die Idee

In diesem veranschaulichenden Kapitel soll die Idee des anschließend hergeleiteten Verfahrens deutlich gemacht werden; hierzu wird zur Entkomplizierung nicht nur bewusst schlampig kein sprachlicher Unterschied zwischen Vektoren und den sie veranschaulichenden Pfeilen gemacht, das Ganze wird durch ein physikalisches Modell zusätzlich vergröbert. Nach dem Verständnis des allgemeinen Verfahrens darf dieser lediglich als Sprungbrett oder Leiter dienende Abschnitt daher getrost vergessen werden.
Stellen wir uns das aus kräftigem Draht gefertigte Kantenmodell eines Einheitswürfels (also Kantenlänge 1) vor, so sehen wir als Teil davon die drei Vektoren einer orthonormierten Basis. Wir ernennen hierzu eine Ecke des Würfels zum Ursprung O und entfernen alle Kanten, die nicht von dieser Ecke ausgehen. Wenn wir jetzt noch die Endpunkte der drei von O ausgehenden Kanten mit kleinen

Pfeilspitzen versehen, haben wir ein hübsches, wenn auch mit Verletzungsgefahr verbundenes Modell eines dreidimensionalen orthogonalen kartesischen Koordinatensystems; die drei gerichteten Kanten selber bilden, nachdem wir sie in einer festen Position fixiert haben, eine orthonormierte Basis des Raumes $\mathbf{R}^3$.
Damit haben wir das, was am Ende herauskommen soll. Aber da wir von einer beliebigen Basis des Raumes ausgehen wollen, biegen wir nun im Ursprung die drei Kanten in andere Richtungen und verkürzen (geht leicht mit einer geeigneten Zange) oder verlängern (dazu brauchts fachmännische Hilfe) die Kanten ganz beliebig. Wir achten lediglich darauf, dass wir nicht alle drei Kanten in eine gemeinsame Ebene bringen; von der Zuhilfenahme einer Presse sollte also besser abgesehen werden.
Nachdem nun hinreichend viel Schaden angerichtet worden ist, brauchen wir ein Verfahren zur Wiedergutmachung. Auf welche Weise können wir durch Verbiegen und Verkürzen/Verlängern Schritt für Schritt wieder aus unserem wirren Dreibein die ästhetisch hochwertige orthonormierte Basis des $\mathbf{R}^3$ machen; wie also ist vorzugehen, damit die korrigierten Vektoren am Ende wieder einen Einheitswürfel aufspannen?
Wer alles gleichzeitig versucht, erreicht am Ende gar nichts, abwechselnd hier ein bisschen und dann wieder da ein bisschen herumzubiegen nützt wahrscheinlich wenig, sondern auch hier ist die bewährte Grunddevise der Mathematik angesagtes Motto: Divide et impera!
Bezeichnen wir die drei noch nicht orthonormierten Basisvektoren mit $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$, die drei am Ende der erfolgreichen Umformung erhaltenen orthonormierten Vektoren mit $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ und die zwar schon in die richtige Richtung gebrachten, aber noch nicht mit der Norm 1 versehenen Vektoren mit $\vec{b}'_1, \vec{b}'_2, \vec{b}'_3$, so erscheint folgende Reihenfolge des Vorgehens zweckmäßig:
Wir arbeiten die Vektoren nacheinander ab und achten darauf, dass jeder Vektor die Norm 1 erhält und zu allen seinen Vorgängern orthogonal ist.

1. Wir starten mit $\vec{b}'_1 = \vec{a}_1$, denn da es noch keine Vorgänger gibt, muss auch keine Orthogonalitätsbedingung erfüllt sein. Wir normieren durch $\vec{b}_1 = \frac{1}{||\vec{b}'_1||}\vec{b}'_1$ den ersten Vektor und haben damit ein Drittel unserer Aufgabe erfüllt: Der erste Vektor ist orthogonal zu allen mit kleinerem Index und ist normiert. Wir haben gewissermaßen mit Zange oder Schweißgerät die erste Kante auf die Länge 1 gebracht.

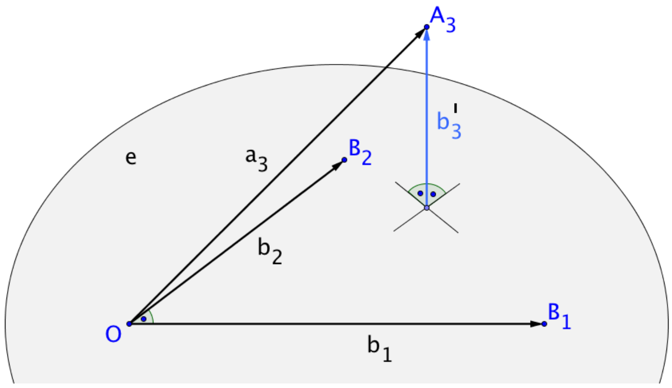
2. Wir fassen die Vektoren als Ortsvektoren der entsprechenden Punkte auf und betrachten den Punkt A_2 und die Ursprungsgerade g durch B_1. Die bekannte Grundaufgabe, das Lot von A_2 auf g zu fällen liefert als Lotvektor doch einen zu $\vec{b}_1$ orthogonalen Vektor, der in $< \vec{a}_1, \vec{a}_2 >$ liegt (das ist anschaulich die Ebene durch O, A_2 und B_1).



Für diesen Lotvektor $\vec{b}'_2$ gilt dann $\vec{b}'_2 = \vec{a}_2 - r_1\vec{b}_1$ (Zu g senkrechter Pfeil von g zum Punkt A_2). Skalare Multiplikation mit $\vec{b}_1$ liefert $0 = \vec{a}_2 * \vec{b}_1 - r_1\vec{b}_1 * \vec{b}_1$, also (wegen $||\vec{b}_1|| = 1$) $\quad r_1 = \vec{a}_2 * \vec{b}_1$.
Somit hat man mit $\vec{b}'_2 = \vec{a}_2 - (\vec{a}_2 * \vec{b}_1)\vec{b}_1$ den gewünschten zu $\vec{b}_1$ orthogonalen Vektor. Normieren liefert dann $\vec{b}_2 = \frac{1}{||\vec{b}'_2||}\vec{b}'_2$.

Anschaulich gesprochen hat man das Drahtgerüst mit den Kanten $\vec{b}_1$ und $\vec{a}_2$ flach auf den Tisch gelegt und dann $\vec{a}_2$ in der Ebene des Tisches so gebogen, dass diese Kante senkrecht zu $\vec{b}_1$ verläuft. Die neue Kante $\vec{b}_2'$ wird dann noch durch Normieren zur Kante $\vec{b}_2$.

3. Der dritte Vektor $\vec{b}_3'$ soll nun orthogonal zu $\vec{b}_1$ und $\vec{b}_2$ sein, also orthogonal zur von $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ aufgespannten Ursprungsebene e verlaufen. Ein geeigneter Vektor wird also durch das von A_3 auf e gefällte Lot erhalten.



Die Ebene e hat die Parameterdarstellung $\vec{x} = s_2\vec{b}_1 + s_2\vec{b}_2$, daher hat der Vektor $\vec{b}_3'$, der von e zu A_3 führt, eine Darstellung der Form $\vec{b}_3' = \vec{a}_3 - r_1\vec{b}_1 - r_2\vec{b}_2$. Skalare Multiplikation mit $\vec{b}_1$ liefert $0 = \vec{a}_3 * \vec{b}_1 - r_1\vec{b}_1 * \vec{b}_1 - 0$, also $r_1 = \vec{a}_3 * b_1$.

Entsprechend führt skalare Multiplikation mit $\vec{b}_2$ zu $0 = \vec{a}_3 * \vec{b}_2 - 0 - r_2\vec{b}_2 * \vec{b}_2$, also $r_2 = \vec{a}_3 * \vec{b}_2$.

Damit erhält man $\vec{b}_3' = \vec{a}_3 - (\vec{a}_3 * \vec{b}_1)\vec{b}_1 - (\vec{a}_3 * \vec{b}_2)\vec{b}_2$ und beendet mit $\vec{b}_3 = \frac{1}{||\vec{b}_3'||}\vec{b}_3'$ das Verfahren.

Im letzten Schritt hat man gewissermaßen die dritte Kante so verbogen, dass sie senkrecht zur Tischebene und damit zu den in dieser Ebene liegenden Kanten $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ (bzw. $\vec{b}_1$ und $\vec{b}_2$) verläuft, und sie dann noch normiert.

2.1 Übungsaufgabe

Orthonormiere nach dem oben angegebenen Verfahren die Basis $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ des Raumes $\mathbf{R}^3$ für die Vektoren $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 15 \end{pmatrix}, \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$.

3 Das Verfahren der Orthonormierung

Das allgemeine Verfahren zum Orthonormieren einer vorgelegten Basis eines endlichdimensionalen euklidischen Vektorraums ergibt sich durch Verallgemeinerung und Weiterführung der im vorhergehenden Kapitel entwickelten Verfahrensweise:
Gegeben ist ein euklidischer Vektorraum V mit einer Basis $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \cdots, \vec{a}_n)$. Gesucht wird eine orthonormierte Basis $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \cdots, \vec{b}_n)$ des Raumes V, wobei zusätzlich gilt, dass für jedes i aus $\{1, 2, 3, \cdots, n\}$ die linearen Hüllen $< \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \cdots, \vec{a}_i >$ und $< \vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \cdots, \vec{b}_n >$ übereinstimmen.
Das Verfahren wird nun induktiv erklärt. Zunächst setze man $\vec{b}_1' := \vec{a}_1$ und dann $\vec{b}_1 = \frac{1}{||\vec{b}_1'||}\vec{b}_1'$.

Hat man nun bereits $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, , \vec{b}_i$ konstruiert $(i < n)$, so erhält man $\vec{b}_{i+1}$ durch

$$\vec{b}_{i+1}' = \vec{a}_{i+1} - \sum_{j=1}^{i} (\vec{a}_{i+1} * \vec{b}_j)\vec{b}_j; \qquad \vec{b}_{i+1} = \frac{1}{||\vec{b}_{i+1}'||}\vec{b}_{i+1}'.$$

Für $\vec{b}'_i$ kann sich bei diesem Verfahren nie der Nullvektor ergeben, da sonst $\vec{a}_i$ als Linearkombination von $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, , \vec{a}_{i-1}$ darstellbar wäre, was der Voraussetzung von $(\vec{a}_i)_{i=1}^n$ als Basis widerspricht. Daher sind alle Vektoren $\vec{b}_i$ bei diesem Verfahren definiert. Jeder Vektor $\vec{b}_i$ ist auch zu $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, , \vec{b}_{i-1}$ orthogonal, wie durch vollständige Induktion zu zeigen ist.

3.1 Übungsaufgabe 3.1

Zeige mit Hilfe vollständiger Induktion, dass bei dem oben angegebenen Verfahren für jedes i aus $\{1, 2, 3, \cdots, n\}$ der Vektor $\vec{b}_i$ zu $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \cdots, \vec{b}_{i-1}$ orthogonal ist.

3.2 Übungsaufgabe 3.2

Orthonormiere die in Übungsaufgabe 1.1 angegebene Basis des Raumes $\mathbf{R}^4$.

3.3 Übungsaufgabe 3.3

Als Vektorraum P_2 wird die lineare Hülle von p_0, p_1, p_2 betrachtet, also die Menge der ganzrationalen Funktionen vom Grade < 3. Definiert man für zwei Funktionen f, g dieser Menge

$$f * g = \int_{-1}^{1} f(t) \cdot g(t) \; dt,$$

dann wird hierdurch ein Skalarprodukt in P_2 definiert. Ermittle mit Hilfe des Verfahrens zum Orthogonalisieren und Normieren eine orthonormierte Basis von P_2.