Der Austauschsatz von Steinitz

Klaus-R. Loeffler

Nicht nur im Zusammenhang mit linearen Abbildungen kann der Aufwand bei der Untersuchung von Vektorräumen wesentlich von der gewählte Basis abhängen. Gelegentlich möchte man auch, dass bestimmte Vektoren in der Basis auftreten, ohne dass man gleich eine komplette neue Basis zusammenstellen will. In diesem Zusammenhang wird der Austauschsatz von Steinitz wichtig. Er gewährleistet, dass man unter bestimmten Voraussetzungen Vektoren in eine Basis einschleusen kann und so zu einer modifizierten Basis gelangt.

1 Der Austauschsatz

Voraussetzung

V sei ein Vektorraum mit einer Basis $B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, ..., \vec{b}_n)$; $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, ..., \vec{a}_m$ seien m linear unabhängige Vektoren aus V .

Behauptung

Man kann die Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, ..., \vec{a}_m$ so gegen m Vektoren der Basis B austauschen, dass die erhaltene Menge wieder eine Basis von V bildet; mit anderen Worten: Nach geeigneter Umnummerierung innerhalb der Basis B bildet $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, ..., \vec{a}_m, \vec{b}_{m+1}, \vec{b}_{m+2}, ..., \vec{b}_n)$ eine Basis von V.

Beweis

Zur Beweisführung benutzt man Induktion nach m.

1. (Induktionsanfang) Zur Induktionsverankerung, also für den Induktionsanfang mit $m = 1$ ist folgendes zu zeigen: Wenn $\vec{a}_1$ ein linear unabhängiger Vektor ist, kann man einen der Vektoren aus der Basis B durch $\vec{a}_1$ ersetzen und erhält wieder eine Basis von V.

   Da B eine Basis von V ist, gibt es reelle Zahlen $r_1, r_2, r_3, ..., r_n$, mit denen man $\vec{a}_1$ als Linearkombination der Vektoren von B darstellen kann: $\vec{a}_1 = r_1\vec{b}_1 + r_2\vec{b}_2 + r_3\vec{b}_3 + ... + r_n\vec{b}_n$.

   Da $\vec{a}_1$ nach Voraussetzung linear unabhängig ist, also nicht der Nullvektor, können nicht alle Koeffizienten r_i den Wert 0 haben. Durch Umnummerieren innerhalb der Basis B kann man erreichen, dass r_1 ein solcher von null verschiedener Koeffizient ist. Auflösen nach $\vec{b}_1$ ergibt dann:

   $$\vec{b}_1 = \frac{1}{r_1}\,\vec{a}_1 - \frac{r_2}{r_1}\,\vec{b}_2 - \frac{r_3}{r_1}\,\vec{b}_3 - ... - \frac{r_n}{r_1}\,\vec{b}_n.$$

   Jede Linearkombination von $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, ..., \vec{b}_n$ lsst sich also auch als Linearkombination von $\vec{a}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, ..., \vec{b}_n$ darstellen. Daher ist $(\vec{a}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, ..., \vec{b}_n)$ ein Erzeugendensystem von V.

   Zum Nachweis, dass $(\vec{a}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, ..., \vec{b}_n)$ eine Basis von V ist, muss noch die lineare Unabhängigkeit bewiesen werden; dazu ist zu zeigen: Nur wenn alle Koeffizienten s_i den Wert null haben, ist eine Darstellung $s_1\vec{a}_1 + s_2\vec{b}_2 + s_3\vec{b}_3 + ... + s_n\vec{b}_n = \vec{o}$ möglich .

Aber wäre s_1 verschieden von 0, könnte man $\vec{a}_1$ als Linearkombination von $\vec{b}_2, \vec{b}_3, ..., \vec{b}_n$ darstellen. Das ist aber nicht möglich, da die Darstellung jedes Vektors bezüglich einer Basis eindeutig ist und der Koeffizient von $\vec{b}_1$ bei der Basisdarstellung von $\vec{a}_1$ von null verschieden ist. Also ist $s_1 = 0$.

Dann folgt aber $s_2\vec{b}_2 + s_3\vec{b}_3 + ... + s_n\vec{b}_n = \vec{o}$. Da $\vec{b}_2, \vec{b}_3, ..., \vec{b}_n$ linear unabhängig sind, müssen auch die Koeffizienten $s_2, s_3, ..., s_n$ den Wert null haben. Also verschwinden alle s_i.

Damit ist $(\vec{a}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, ..., \vec{b}_n)$ als Basis von V nachgewiesen.

2. Schluss von $m - 1$ auf m

   Zum Schluss von $m - 1$ auf $m (m \geq 2)$ wird vorausgesetzt, dass von den linear unabhängigen Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, ..., \vec{a}_m$ bereits $m - 1$ gegen Vektoren der Basis B ausgetauscht wurden. Man hat also - wieder nach geeigneter Umnummerierung der $\vec{b}_i$ - bereits eine Basis $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, ..., \vec{a}_{m-1}, \vec{b}_m, \vec{b}_{m+1}, \vec{b}_{m+2}, ..., \vec{b}_n)$.

   Zu zeigen ist dann, dass man durch Tausch von $\vec{a}_m$ gegen einen der Vektoren $\vec{b}_m, \vec{b}_{m+1}, ..., \vec{b}_n$ wieder eine Basis von V erhlt. Der Rest des Beweises wird nur skizziert; dem Leser wird zur Übung die vollständige Ausführung empfohlen.

   In der Darstellung von $\vec{a}_m$ in der Basis $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, ..., \vec{a}_{m-1}, \vec{b}_m, \vec{b}_{m+1}, \vec{b}_{m+2}, ..., \vec{b}_n)$ können nicht alle Koeffizienten der $\vec{b}_i$ null sein, weil sonst - entgegen der Voraussetzung - die $\vec{a}_i$ linear abhängig wären.

   Man kann also einen der Vektoren $\vec{b}_m, \vec{b}_{m+1}, ..., \vec{b}_n$ - und nach Umnummerierung darf man voraussetzen, dass dies $\vec{b}_m$ ist, - als Linearkombination von $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, ..., \vec{a}_m, \vec{b}_{m+1}, ..., \vec{b}_n$ darstellen. Daraus folgt, dass $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, ..., \vec{a}_m, \vec{b}_{m+1}, ..., \vec{b}_n)$ ein Erzeugendensystem von V ist.

   Und die lineare Unabhängigkeit von $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, ..., \vec{a}_m, \vec{b}_{m+1}, ..., \vec{b}_n$ wird analog zur Untersuchung des Falls $m = 1$ gezeigt.

Als wichtige Folgerung aus dem Steinitzschen Austauschsatz ergibt sich, dass aus der Existenz zweier Basen $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, ..., \vec{a}_m)$ und $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, ..., \vec{b}_n)$ eines Vektorraums $m = n$ folgt. Die Anzahl der Elemente einer Basis hängt also nur vom jeweiligen Vektorraum, nicht aber von der gewählten Basis ab. Diese Zahl heißt - wenn der Vektorraum eine endliche Basis hat - die Dimension des Vektorraums. Die Dimension des Vektorraums V wird abgekürzt als $\dim(V)$ notiert.

2 Der Dimensionssatz für lineare Abbildungen

Eine weitere Folgerung ist der Dimensionssatz für lineare Abbildungen: Für jede lineare Abbildung f eines endlichdimensionalen Vektorraums V in einen Vektorraum W gilt: $\operatorname{def}(f) + \operatorname{rg}(f) = \dim(V)$.

Zum Beweis dieses Satzes setze man $k := \operatorname{def}(f)$; weiterhin sei $\dim(V) =: n$.

Zu einer Basis $B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, ..., \vec{b}_n)$ des Vektorraums V und einer Basis $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, ..., \vec{a}_k)$ von $\operatorname{Kern}(f)$ kann man nun nach dem Austauschsatz von Steinitz - nach geeigneter Umnummerierung der $\vec{b}_i$ eine Basis B' von V erhalten, welche die Basisvektoren des Kerns von f enthält:

$$B' = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, ..., \vec{a}_k, \vec{b}_{k+1}, \vec{b}_{k+2}, ..., \vec{b}_n).$$

Dann erhält man das Bild von f als lineare Hülle von B', also als

$$< f(\vec{a}_1), f(\vec{a}_2), ..., f(\vec{a}_k), f(\vec{b}_{k+1}), f(\vec{b}_{k+2}), ..., f(\vec{b}_n) >=< f(\vec{b}_{k+1}), f(\vec{b}_{k+2}), ..., f(\vec{b}_n) >$$

Denn da $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, ..., \vec{a}_k$ im Kern von f liegen, ist $f(\vec{a}_i) = \vec{o}$ für $i = 1, 2, ..., k$.

Die $n - k$ Vektoren $f(\vec{b}_{k+1}), f(\vec{b}_{k+2}), ..., f(\vec{b}_n)$ bilden also ein Erzeugendensystem von Bild(f); sie sind linear unabhängig, wie nachfolgend gezeigt wird.

Aus $r_{k+1}f(\vec{b}_{k+1}) + r_{k+2}f(\vec{b}_{k+2}) + ... + r_n f(\vec{b}_n) = \vec{o}$

folgt $f(r_{k+1}\vec{b}_{k+1} + r_{k+2}\vec{b}_{k+2} + ... + r_n\vec{b}_n) = \vec{o}$.

Daher liegt $r_{k+1}\vec{b}_{k+1} + r_{k+2}\vec{b}_{k+2} + ... + r_n\vec{b}_n$ im Kern von f und hat somit eine Darstellung $r_1\vec{a}_1 + r_2\vec{a}_2 + ... + r_k\vec{a}_k$.

Dann ist aber $r_1\vec{a}_1 + r_2\vec{a}_2 + ... + r_k\vec{a}_k - r_{k+1}\vec{b}_{k+1} - r_{k+2}\vec{b}_{k+2} - ... - r_n\vec{b}_n$ eine Darstellung des Nullvektors als Linearkombination von Vektoren einer Basis. Also müssen alle Koeffizienten r_i den Wert null haben. Insbesondere haben daher $r_{k+1}, r_{k+2}, ..., r_n$ den Wert null, was zum Nachweis der linearen Unabhängigkeit zu zeigen war.

Somit ist $(f(\vec{b}_{k+1}), f(\vec{b}_{k+2}), ..., f(\vec{b}_n))$ eine Basis von Bild(f); der Rang der Abbildung f beträgt mithin $n - k$.

Also erhält man: $\mathrm{def}(f) + \mathrm{rg}(f) = k + (n - k) = n = \dim(V)$; das war zu zeigen.