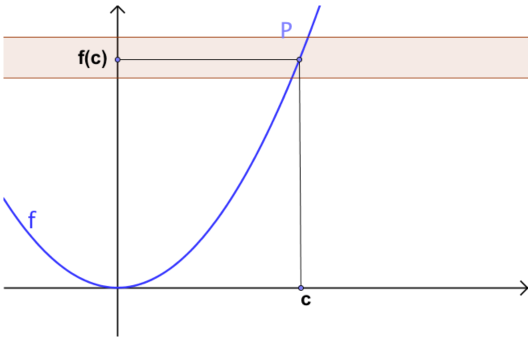
Stetigkeit

Klaus-R. Loeffler

Inhaltsverzeichnis

1 Vorstellung, Definition und Folgerungen

Bei der Anwendung des Begriffs der Stetigkeit (oder Kontinuität) auf Funktionen mag die Vorstellung der zeichnerischen Darstellung eine wichtige Rolle gespielt haben: Eine Funktion, deren Graphen man ohne Absetzen des Stiftes zeichnen kann, entspricht dieser Vorstellung. Anschaulich gesprochen: Legt man einen beliebig schmalen Horizontalstreifen um einen Punkt P mit den Koordinaten $(c|f(c))$ des Graphen einer Funktion f, so sollen alle Punkte $(x|f(x))$ in diesem Horizontalstreifen liegen, wenn x nahe genug bei c liegt.



Die Funktion f wird also als stetig an der Stelle c bezeichnet, wenn es zu jedem Horizontalstreifen um die Gerade mit der Gleichung $y = f(c)$ einen Vertikalstreifen um die Gerade mit der Gleichung $x = c$ mit folgender Eigenschaft gibt: Der Teil des Graphen von f der ganz im Vertikalstreifen liegt, wird auch vollständig vom Horizontalstreifen überdeckt.
Wenn wir die Streifen so legen, dass die angegebenen Geraden jeweils die Mittelparallelen im Streifen sind, und wenn wir die halbe Breite des Horizontalstreifens mit ε und die halbe Breite des Vertikalstreifens mit δ bezeichnen, so ergibt sich die folgende Charakterisierung dafür, dass f an der Stelle c stetig ist:
Zu jeder positiven reellen Zahl ε gibt es eine positive reelle Zahl δ mit folgender Eigenschaft: Für jedes x aus der Argumentmenge A von f, das von c um weniger als δ entfernt ist, unterscheidet sich $f(x)$ von $f(c)$ um weniger als ε. Oder kürzer in logischer Notation

$$\bigwedge_{\varepsilon\in\mathbb{R}_+} \bigvee_{\delta\in\mathbb{R}_+} \bigwedge_{x\in A} (|x-c| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon)$$

Die Definition lässt unmittelbar einige Folgerungen zu

- Ist c isolierte Stelle der Argumentmenge von f, ist f bei c stetig

  Denn wenn c isoliert in A ist, gibt es eine positive Zahl δ, für die das offene Intervall $]c-\delta, c+\delta[$ außer c kein Element von A enthält. Mit diesem δ wird die Definition der Stetigkeit bei c für beliebiges ε erfüllt.

- Ist c Häufungspunkt von A, ist f genau dann an der Stelle $c \in A$ stetig, wenn der Grenzwert von f an der Stelle c existiert und mit $f(c)$ übereinstimmt.

- Ist f an der Stelle c stetig und ist $f(c)$ positiv, dann gibt es ein offenes Intervall um c, über dem f nur größere Werte als $\frac{f(c)}{2}$ annimmt, also insbesondere positiv ist.

  Zum Nachweis braucht man nur die Stetigkeitsdefinition auf $\varepsilon = \frac{f(c)}{2}$ anzuwenden. Der diesen Sachverhalt angebende Satz wird gelegentlich als *Positivitätssatz für stetige Funktionen* bezeichnet.

1.1 Stetigkeitscharakterisierung durch Folgen

Bei den ersten der nachfolgenden Regeln wird der Beweis unter Rückgriff auf die Definition geführt. Alternativ ergeben sich die Regeln unmittelbar aus den entsprechenden Konvergenzsätzen für reelle Zahlenfolgen, wenn man - wie bei den weiter unten angegebenen Regeln - die Äquivalenz folgender Aussagen benutzt:

(a) Die auf der Menge A definierte Funktion f ist an der Stelle c stetig.

(b) Jede unendliche Folge (c_n) mit Gliedern in A, die gegen c konvergiert, hat eine gegen $f(c)$ konvergente Bildfolge.

Aus (a) folgt (b)

Gegeben sei eine in A gegen c konvergente Folge (c_n). Zum Nachweis von $\lim_{n\to\infty} f(c_n) = f(c)$ sei ein positives ε vorgegeben. Gesucht wird eine Nummer n_0 mit der Eigenschaft, dass für alle Nummern n ab n_0 gilt $|f(c_n) - f(c)| < \varepsilon$.

Da f bei c stetig ist, gibt es eine positive Zahl δ mit

$$(1) \qquad \bigwedge_{x\in A} (|x-c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon).$$

Außerdem gibt es wegen der vorausgesetzten Konvergenz eine Nummer n_0, die folgendes leistet:

$$(2) \qquad \bigwedge_{n\in N} (n \geq n_0 \Rightarrow |c_n - c| < \delta).$$

Aus (1) und (2) folgt, dass die Nummer n_0 aus (2) die gewünschte Eigenschaft hat.

Aus non (a) folgt non (b)

Da f als unstetig bei c vorausgesetzt wird, existiert positive Zahl ε mit folgender Eigenschaft

$$(3) \qquad \bigwedge_{\delta\in\mathbb{R}_+} \bigvee_{x\in A} (|x-c| < \delta \wedge |f(x) - f(c)| \geq \varepsilon).$$

Wählt man also für jede positive ganze Zahl n den Wert $\frac{1}{n}$ als δ, so liefert (3) die Existenz einer Folge (c_n), bei der für jedes n gilt: $(|c_n - c| < \frac{1}{n} \wedge |f(c_n) - f(c)| \geq \varepsilon$.

Da die Folge $(|c_n - c|)$ eine Nullfolge als Majorante hat , konvergiert (c_n) gegen c, ohne dass die Bildfolge den Grenzwert $f(c)$ hat; die Existenz einer solchen Folge war zu zeigen.

2 Regeln zur Stetigkeit an einer Stelle c

Nachfolgend seien f und g stets Funktionen mit Argumentmenge A, stetig an einer Stelle $c \in A$.

2.1 Summenregel

Die Summenfunktion $f+g$ (definiert durch $\bigwedge_{x\in A}(f+g)(x) := f(x)+g(x))$ ist bei c stetig.
Zum Beweis sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Gemäß der Stetigkeitsdefinition sei δ_f zu f für $\frac{\varepsilon}{2}$ passend; entsprechend sei δ_g zu g für $\frac{\varepsilon}{2}$ passend. Mit $\delta := min(\delta_f, \delta_g)$ gilt für alle Stellen x aus $A\cap]c-\delta, c+\delta[$

$$|f(x) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \wedge \quad |g(x) - g(c)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

also

$$\begin{aligned}|(f+g)(x) - (f+g)(c)| = |f(x) + g(x) - f(c) - g(c)| &= |f(x) - f(c) + g(x) - g(c)| \\ &\leq |f(x) - f(c)| + |g(x) - g(c)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

2.2 Produktregel

Die Produktfunktion fg (definiert durch $\bigwedge_{x\in A}(fg)(x) := f(x)g(x)$) ist bei c stetig.
Zum Beweis sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Man setze $s := \max(\varepsilon + |g(c)|, |f(c)|)$. Gemäß der Stetigkeitsdefinition sei δ_f zu f für $\frac{\varepsilon}{2s}$ passend; entsprechend sei δ_g zu g für $\frac{\varepsilon}{2s}$ passend. Mit $\delta := min(\delta_f, \delta_g)$ gilt für alle Stellen x aus $A\cap]c-\delta, c+\delta[$

$$|f(x) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{2s} \quad \wedge \quad |g(x) - g(c)| < \frac{\varepsilon}{2s},$$

also

$$\begin{aligned}
|(fg)(x) - (fg)(c)| &= |f(x)g(x) - f(c)g(x) + f(c)g(x) - f(c)g(c)| \\
&= |(f(x) - f(c)) \cdot g(x) + f(c) \cdot (g(x) - g(c))| \\
&\leq |f(x) - f(c)| \cdot |g(x)| + |f(c)| \cdot |g(x) - g(c)| \\
&= |f(x) - f(c)| \cdot |g(x) - g(c) + g(c)| + |f(c)| \cdot |g(x) - g(c)| \\
&\leq |f(x) - f(c)| \cdot s + s \cdot |g(x) - g(c)| < \frac{\varepsilon}{2s} \cdot s + s \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

2.3 Potenzregel

Aus der Produktregel folgt durch vollständige Induktion die Potenzregel:
Ist f eine an einer Stelle c stetige Funktion und n eine positive ganze Zahl, dann ist auch die Funktion f^n (mit $f^n(x) := (f(x))^n$) bei c stetig.

2.4 Kehrwertregel

Unter der zusätlichen Voraussetzung, dass f keine Nullstelle hat, ist die Kehrwertfunktion $\frac{1}{f}$ (definiert durch $\bigwedge_{x\in A} \frac{1}{f}(x) := \frac{1}{f(x)}$) stetig an der Stelle c.
Zum Beweis wird vorausgesetzt, dass $f(c)$ positiv ist (andernfalls verläuft der Beweis analog). Vorgegeben sei ein positives ε.
Nach der Stetigkeitsdefinition gibt es ein positives δ_1, so dass für alle Stellen x der Argumentmenge A mit $|x - c| < \delta_1$ gilt $|f(x) - f(c)| < \frac{f^2(c)}{2} \cdot \varepsilon$.
Und nach dem oben angegebenen Positivitätssatz gibt es eine positive Zahl δ_2, für die $f(x) > \frac{f(c)}{2}$ gilt, wenn die Argumentstelle x im Intervall $]c - \delta_2, c + \delta_2[$ liegt.
Mit $\delta := \min(\delta_1, \delta_2)$ gilt daher für alle $x \in A\cap]c - \delta, c + \delta[$:

$$|\frac{1}{f}(x) - \frac{1}{f}(c)| = |\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(c)} = |\frac{f(c) - f(x)}{f(x) \cdot f(c)}| \leq |\frac{f(c) - f(x)}{\frac{f(c)}{2} \cdot f(c)}| < |\frac{\frac{f^2(c)}{2} \cdot \varepsilon}{\frac{f(c)}{2} \cdot f(c)}| = \varepsilon$$

2.5 Quotientenregel

Wenn die Funktion g keine Nullstelle hat, ist die Funktion $\frac{f}{g}$ (definiert durch $\bigwedge_{x\in A} \frac{f}{g}(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$ an der Stellei c stetig.
Wegen $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$ folgt das unmittelbar aus Kehrwert- und Produktregel.

2.6 Betragsregel

Die Funktion abs f, definiert durch $\bigwedge_{x\in A}$ (abs $f)(x) := |f(x)|$ ist bei c stetig. Das folgt, da nach der Differenzenungleichung

$$|(\text{abs}f)(x) - (\text{abs}f)(c)| = |\ |f(x)| - |g(x)|\ | \leq |f(x) - g(x)|$$

gilt, ohne Konstruktion eines neuen δ zum vorgegebenen ε aus der Stetigkeitsdefinition.

2.7 Verkettungsregel

Unter der Voraussetzung

$$\begin{aligned} A, B \subset \mathbb{R}; c \in A \\ f: A \to \mathbb{R}, \text{stetig an der Stelle } c; f(A) \subset B \\ g: B \to \mathbb{R}, \text{stetig an der Stelle } f(c) \end{aligned}$$

ist die durch Verkettung entstehende Funktion $g \circ f$ stetig an der Stelle $f(c)$.
Denn wenn (a_n) eine gegen c konvergierende Folge in A ist, dann konvergiert $(f(a_n))$ gegen $f(c)$ und somit $(g(f(a_n))$ gegen $g(f(c))$.

2.8 Einschränkungsregel

Unter der Voraussetzung

$$c \in B \subset A \subset \mathbb{R}; f: A \to \mathbb{R}, \text{stetig an der Stelle } c; g: B \to \mathbb{R}; \bigwedge_{x \in B} g(x) = f(x)$$

ist auch die Funktion g an der Stelle c stetig.
g wird auch als *Einschränkung von f auf B* bezeichnet, in Zeichen : $g = f|_B$.
Zum Beweis ist lediglich zu beachten, dass jede gegen c konvergente Folge mit Gliedern in B auch eine gegen c konvergente Folge mit Gliedern in A ist.

2.9 Ausdehnungsregel

Unter der Voraussetzung

$$\begin{aligned} A, B \subset \mathbb{R}; c \in A \\ f: A \to \mathbb{R}, \text{stetig an der Stelle } c; \\ g: B \to \mathbb{R}; \bigwedge_{x \in B \cap A} g(x) = f(x) \end{aligned}$$

ist die auf $A \cup B$ definierte Funktion h mit

$$\bigwedge_{x \in A} h(x) = f(x) \quad \wedge \quad \bigwedge_{x \in B \setminus A} h(x) = g(x)$$

genau dann stetig bei c, wenn c entweder kein Häufungspunkt von B ist oder g an der Stelle c den Grenzwert $f(c)$ hat.
Denn wenn c kein Häufungspunkt von B ist, dann liegen von einer in $A \cup B$ gegen c konvergierenden Folge von einer Nummer an alle Folgenglieder in A; die Bildfolge konvergiert also gegen $f(c)$.

3 Stetige Funktionen auf abgeschlossenen Intervallen

3.1 Definition der stetigen Funktion

Eine auf einer Argumentmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ definierte Funktion f heißt stetig, wenn sie an jeder Stelle $x \in A$ stetig ist.
Von den in diesem Abschnitt betrachteten Funktionen wird jeweils außer der Stetigkeit vorausgesetzt, dass ihre Argumentmenge A ein abgeschlossenes Intervall $[a; b]$ ist.

3.2 Der Zwischenwertsatz für stetige Funktionen

Wesentlich wird nachfolgend von den Eigenschaften der reellen Zahlen mehrfach die folgende verwendet: Jede nach oben beschränkte nicht-leere Menge reeller Zahlen hat ein Supremum (also eine kleinste obere Schranke).

3.2.1 Nullstellensatz

Ist f eine auf $[a;b]$ definierte stetige Funktion mit $f(a) < 0 < f(b)$, dann gibt es ein $\xi \in]a;b[$ mit $f(\xi) = 0$.
Zum Beweis sei $M = \{x \in [a;b] | \bigwedge_{x \in [a;x]} f(x) < 0\}$. Die Menge M ist nach oben durch b beschränkt und wegen $f(a) < 0$ nicht leer, hat also ein Supremum ξ. Da M Teilmenge des abgeschlossenen Interevalls $[a;b]$ ist, liegt auch ξ in $[a;b]$ und f ist dort stetig.
Wäre $f(\xi) < 0$, gäbe es ein Intervall $]\xi - \delta; \xi + \delta[$, über dem $f(x)$ negativ wäre, also wäre ξ nicht die kleinste obere Schranke von M. Entsprechend würde aus $f(\xi) > 0$ folgen, dass $f(x)$ in einem ganzen Intervall um ξ positiv ist, es gäbe also Elemente $x < \xi$, die nicht in M liegen. Somit folgt, wie zu beweisen war, $f(\xi) = 0$.

3.2.2 Zwischenwertsatz

Gilt für die auf einer das abgeschlossene Intervall $[a;b]$ umfassenden Argumentmenge definierte Funktion f für die reelle Zahl λ die Ungleichung $f(a) \leq \lambda \leq f(b)$, dann gibt es im Intervall $[a;b]$ eine Stelle ξ mit $f(\xi) = \lambda$.
Ein Beweis muss nur für den Fall $f(a) < \lambda < f(b)$ geführt werden. Dazu definiert man auf A die Funktion h durch die Vorschrift $\bigwedge_{x \in A} h(x) = f(x) - c$. Die Funktion h ist stetig und erfüllt die Voraussetzungen des Nullstellensatzes, hat also eine Nullstelle $\xi \in [a;b]$.

3.2.3 Fixpunktsatz

Wenn die stetige Funktion f ein abgeschlossenes Intervall $[a;b]$ in sich abbildet, dann hat sie mindestens einen Fixpunkt ξ, es gibt also mindestens eine Stelle $\xi \in [a;b]$ mit $f(\xi) = \xi$.
Zum Beweis betrachte man die auf $[a;b]$ durch $\bigwedge_{x \in [a;b]} h(x) = f(x) - x$ definierte Hilfsfunktion h. Diese ist stetig und erfüllt wegen $h(a) = f(a) - a < 0$ und $h(b) = f(b) - b > 0$ die Voraussetzungen des Nullstellensatzes, hat also eine Nullstelle ξ. Aus $h(\xi) = 0$ folgt $f(\xi) = \lambda$, was zu zeigen war.

3.2.4 Erläuterung zur gleichmäßigen Stetigkeit

Gibt man bei einer stetigen Funktion eine positive Zahl ε vor, so gibt es für jede Stelle c der Argumentmenge A nach der Stetigkeitsdefinition eine positive Zahl δ, so dass für alle Argementstellen x aus $]c - \delta; c + \delta[$ gilt $|f(x) - f(c) < \varepsilon$. Allerdings ist die Größe eines solchen geeigneten δ nicht unabhängig von der jeweiligen Argumentstelle c.
Es ist eine besondere Eigenschaft der auf abgeschlossenen Intervallen definierten stetigen Funktionen, dass für sie zu vorgegebenem ε immer ein Wert von δ existiert, die im Sinne der Stetigkeitsdefinition zu allen Stellen der Argumentmenge passt. Diese Eigenschaft einer stetigen Funktion wird als *gleichmäßige Stetigkeit* bezeichnet. Es gilt also der folgende Satz:

3.2.5 Satz zur gleichmäßigen Stetigkeit

Hat die stetige Funktion f als Argumentmenge ein abgeschlossenes Intervall $[a;b]$, dann ist sie gleichmäßig stetig; es gilt also

(4) $$\bigwedge_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+} \bigvee_{\delta \in \mathbb{R}_+} \bigwedge_{c,x \in A} (|x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon)$$

Zum Beweis wird die Negation der Aussage (4) zum Widerspruch geführt. Es wird also angenommen, es gäbe ein positives ε, bei dem man für jedes positive δ Argumentstellen c, x finden kann, die sich zwar um weniger als δ unterscheiden, deren Funktionswerte aber eine Differenz von mindestens ε haben. Wählt man nun speziell für δ einen Stammbruch, so hat man die Annahme

$$(5) \qquad \bigvee_{\varepsilon\in R_+} \bigwedge_{n\in N^*} \bigvee_{c_n,x_n\in A} \left(|x_n - c_n| < \frac{1}{n} \wedge |f(x_n) - f(c_n)| \geq \varepsilon\right)$$

Jede beschränkte Folge reeller Zahlen hat eine konvergente Teilfolge, eine solche Teilfolge von (c_n) sei mit (d_n) bezeichnet; die indexgleiche Teilfolge von (x_n) sei (y_n).
Da alle Folgenglieder in der Argumentmenge A, also einem abgeschlossenen Intervall liegen, ist auch der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} d_n (=: d)$ Element von A. An der Stelle d kann aber keine Stetigkeit vorliegen, da (y_n) und (d_n) beide gegen d konvergieren, aber $(f(y_n) - f(d_n))$ keine Nullfolge ist.

3.3 Satz vom Maximum und Minimum

3.3.1 Beschränktheit stetiger Funktionen

Jede auf einem abgeschlossenen Intervall $[a; b]$ stetige Funktion ist dort beschränkt, d.h. es gibt ein abgeschlossenes Intervall, das alle Werte von f enthält. Oder anschaulich gesprochen: Der Graph von f wird von einem geeigneten Rechteck vollständig überdeckt. Es genügt, die Beschränktheit nach oben zu zeigen.
Zum Beweis definiere man die Menge M so: $M = \{x \in [a; b] \quad | \quad f|_{[a;x]}$ nach oben beschränkt $\}$. Die nach oben durch b beschränkte Menge M enthält a, ist also nicht leer, und hat somit ein Supremum $s \in [a; b]$. Da f bei s stetig ist, gibt es nach der Stetigkeitsdefinition (hier angewendet für $\varepsilon = 1$) eine positive Zahl δ (o.B.d.A. $\delta < b - a$) mit der Eigenschaft

$$\bigwedge_{x\in[a;b]\cap]s-\delta;s+\delta[} f(x) < f(s) + 1$$

Da f somit über dem Intervall $[a; b] \cap [s - \frac{\delta}{2}; s + \frac{\delta}{2}]$ beschränkt ist, kann s nicht kleiner als b sein; also ist $s = b$. Und da f über $]s - \frac{\delta}{2}; s]$ und (nach Definition von s) über $[a; s - \frac{\delta}{2}]$beschränkt ist, folgt die Beschränktheit von f für ganz $[a; b]$.

3.3.2 Satz vom Maximum

Oben wurde gezeigt, dass jede auf einem abgeschlossenen Intervall stetige Funktion f nach oben beschränkt ist; der nachfolgende Beweis zeigt, dass das Supremum s der Funktion in der Wertemenge $f([a; b])$ liegt, also eine Stelle $c \in [a; b]$ mit $f(c) = s$ existiert. In jeder beschränkten, nicht leeren Menge reeller Zahlen gibt es eine Folge (y_n), die gegen das Supremum konvergiert. Es sei also (y_n) eine gegen s konvergente Folge, (a_n) eine passende Urbildfolge in $[a; b]$, also eine Folge, in der für jeden Index n gilt $f(a_n) = y_n$. Da jede beschränkte reelle Folge eine konvergente Teilfolge hat, gibt es zu (a_n) eine konvergente Teilfolge (c_n); ihr Grenzwert sei c. Da $[a; b]$ abgeschlossen ist, liegt der Grenzwert c in $[a; b]$. Dann ist $(f(c_n))$ als Teilfolge von (y_n) ebenfalls gegen s konvergiert, andererseits aufgrund der Stetigkeit von f konvergent gegen $f(c)$. Aufgrund der Eindeutigkeit des Grenzwerts ist $f(c) = s$; also ist $f(c)$ Maximum der Bildmenge.
Analog ergibt sich die Existenz des Minimums von f.

3.4 Zusammenfassung von Zwischenwertsatz und Maximumssatz

Die beiden in der Überschritt genannten Sätze lassen sich folgendermaßen zusammenfassen:

Die Bildmenge einer auf einem abgeschlossenen Intervall definierten
und dort stetigen Funktion ist ein abgeschlossenes Intervall.

3.5 Integrierbarkeit stetiger Funktionen

Als Folgerung aus den vorhergehenden Abschnitten ergibt sich:
Jede auf einem abgeschlossenen Intervall $[a; b]$ definierte Funktion ist dort (Riemann-) integrierbar.
Denn zu vorgegebenem positiven ε gibt es aufgrund der gleichmäßigen Stetigkeit eine positive ganze Zahl n mit folgender Eigenschaft:

$$\bigwedge_{x\in[a;b]} \bigwedge_{y\in[a;b]} (|x-y| < \frac{b-a}{n} \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a})$$

Bei der Zerlegung $Z = (a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b)$ des Intervalls $[a, b]$ in n Teilintervalle gleicher Länge gilt dann für die zugehörigen Ober- und Untersummen O_Z bzw. U_Z:

$$\begin{aligned} O_Z - U_Z \quad &= \quad \sum_{i=1}^{n} \max(f|_{[x_{i-1};x_i]}) \cdot \frac{b-a}{n} - \sum_{i=1}^{n} \min(f|_{[x_{i-1};x_i]}) \cdot \frac{b-a}{n} \\ = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (\max(f|_{[x_{i-1};x_i]}) - \min(f|_{[x_{i-1};x_i]})) &< \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon \end{aligned}$$

Nach dem Riemannschen Kriterium für Integrierbarkeit ist f mithin integrierbar.

3.6 Stetigkeit der Umkehrfunktion

Eine auf einem abgeschlossenen Intervall definierte stetige Funktion ist genau dann umkehrbar, wenn sie streng monoton ist, denn

1. Eine streng monotone Funktion ist stets umkehrbar.

2. Wenn umgekehrt eine auf einem Intervall $[a; b]$ definierte stetige Funktion nicht streng monoton ist, ist sie nicht injektiv. Denn wenn sie zum Beispiel nicht streng isoton ist, gibt es im Definitionsintervall $[a; b]$ Stellen x_1, x_2, x_3 mit

$$x_1 < x_2 < x_3 \quad \wedge \quad f(x_1) < f(x_2) \quad \wedge \quad f(x_2) > f(x_3).$$

   Dann werden aber alle Werte aus dem offenen Intervall $]\max(f(x_1), f(x_3)); f(x_2)[$ nach dem Zwischenwertsatz sowohl über $]x_1; x_2[$ als auch über $]x_2; x_3[$ angenommen.

Die Umkehrfuntion einer über einem abgeschlossenen Intervall definierten injektiven stetigen Funktion ist wieder stetig. Denn allgemeiner gilt:
Die Umkehrfunktion zu einer streng monotonen Funktion ist immer stetig.

4 Beispiele stetiger Funktionen

In diesem Abschnitt wird zur Abkürzung die Argumentmenge einer Funktion f mit A_f bezeichnet.

4.1 Rationale Funktionen

(1) Jede konstante Funktion ($k \in \mathbb{R}; \bigwedge_{x\in A_f} f(x) = k$) sowie die identische Funktion ($\bigwedge_{x\in A_f} f(x) = x$) sind stetig, denn $\lim_{x\to c} k = k$ und $\lim_{x\to c} x = c$

(2) Jede ganzrationale Funktion, also jede Funktion, deren Funktionsterm sich mit geeignetem $n \in \mathbb{N}$ und geeigneten $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ in der Form $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ darstellen lässt, ist stetig, wie mit Hilfe von Produkt- und Summenregel aus (1) folgt.

(3) Jede gebrochen-rationale Funktion (Quotient zweier ganz-rationaler Funktionen) ist stetig, wie aus der Quotientenregel für Stetigkeit folgt.

Hinweis: Bei der Bildung des Quotienten von Funktionen fallen die Nullstellen der Nennerfunktion aus der Argumentmenge heraus. Dies führt aber nicht zur Unstetigkeit an diesen Stellen (gelegentlich wurde früher in der Schule von hebbaren bzw. nicht hebbaren Unstetigkeitsstellen gesprochen), vielmehr ist die Quotientenfunktion überall stetig, da die Frage nach der Stetigkeit nur Stellen aus der Argumentmenge betrifft. Der mathematische Stetigkeitsbegriff stimmt nicht in allen Fällen mit der anschaulichen Vorstellung einer ohne Absetzen des Stifts zu zeichnenden Graphen überein.

4.2 Wurzelfunktion

Die auf der Menge der nichtnegativen reellen Zahlen oder einer Teilmenge A definierte Wurzelfunktion ($\bigwedge_{x\in A} f(x) = \sqrt{x}$) ist stetig, wie unmittelbar aus dem Wurzelsatz für Grenzwerte folgt.

4.3 Die elementarene Funktionen

Die elementaren Funktionen sin, cos, tan, cot, sinh, cosh, exp und log sind stetig. Der Nachweis wird hier nicht gegeben.

4.4 Stückweise definierte Funktionen

Funktionen, deren Graphenverlauf scheinbar oder wirklich nicht durch einen geschlossenen Ausdruck anzugeben ist, können stückweise definiert werden. Dabei werden zunächst Funktionen $f_1, f_2, \ldots, f_n$ über ihren jeweiligen Argumentmengen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ definiert und dann zu einer Funktion f mit $A_f = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ zusammengesetzt.
Vorausgesetzt wird dabei die Kompatibilität der Funktionswerte:

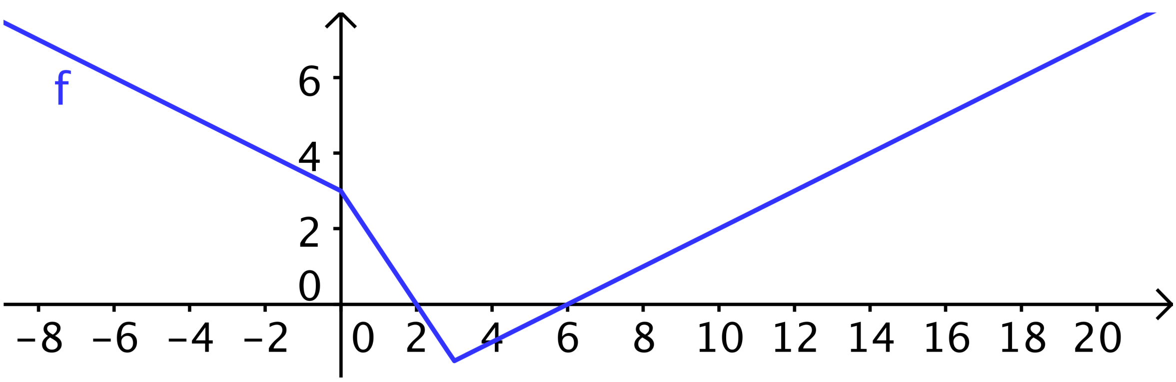
$$\bigwedge_{i,j\in\{1,2,3,\ldots,n\}} \bigwedge_{x\in A_i\cap A_j} f_i(x) = f_j(x)$$

Da an den in der Argumentmenge liegenden Häufungspunkten der Argumentmenge das Vorliegen von Stetigkeit äquivalent dazu ist, dass an der betreffenden Stelle ein Grenzwert der Funktion existiert und mit dem Funktionswert dort übereinstimmt, ist für die Vererbung der Stetigkeit von den Teilfunktionen f_i auf f die folgende Bedingung notwendig und hinreichend

$$\bigwedge_{i,j\in\{1,2,3,\ldots,n\}} \bigwedge_{c\in A_i'} (c \in A_j \Rightarrow \lim_{x\to c} f_i(x) = f_j(c))$$

4.4.1 Beispiele

(1) Intervallweises Zusammensetzen ganzrationaler Funktionen



Im dargestellten Beispiel sind drei verschiedene, über $]-\infty;-2]$ bzw. $[-2;3]$ bzw. $[3;\infty[$ definierte lineare Funktionen zu einer Funktion f zusammengesetzt:

Unter Verwendung der Betragsfunktion lässt sich der Funktionsterm geschlossen als $|x-3|-|\frac{x}{2}+1|$ darstellen.

(2) Schließen einer Definitionslücke

a) bei gebrochen-rationalen Funktionen

Die als Quotient ganzrationalen Funktionen entstehende Funktion g mit $g(x) = \frac{x^2-3x+2}{x-1}$ hat aufgrund der Nullstelle der Nennerfunktion die Argumentmenge $A = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Da für $x \neq 1$ aber die Identität $\frac{x^2-3x+2}{x-1} = x-2$ gilt, kann g an der Stelle 1 stetig ergänzt werden.

Die erweiterte Funktion f ist nun auf der Menge aller reellen Zahlen definiert und ist durch $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x-1}$ für $x \neq 1, f(x) = -1$ oder kürzer durch $\bigwedge_{x\in\mathbb{R}} f(x) = x-2$ anzugeben.

b) bei Beispielen mit der Sinusfunktion

i. $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$

Die durch Quotientenbildung entstehende Funktion ist zunächst an der Stelle 0 nicht definiert. Wie man bei geometrischer Definition der Sinusfunktion mit Hilfe einer Flächeninhaltsabschätzung zeigt, hat die Funktion f an der Stelle 0 den Grenzwert 1. Mit der Definition $f(0) := 1$ dehnt man also f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig aus.

ii. $f(x) = x \cdot \sin(\frac{1}{x})$

Die Funktion f ist auf $\mathbb{R}^*$ definiert. Die Lücke bei 0 lässt sich aber stetig beheben, da die Sinusfunktion beschränkt ist und das Produkt einer an einer Stelle c gegen 0 konvergenten Funktion mit einer in einer Umgebung von c beschränkten Funktion bei c den Grenzwert 0 hat. Mit der Definition $f(0) := 0$ dehnt man also f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig aus.

iii. Gegenbeispiel: $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$

Da die Funktion f in jeder Umgebung von 0 alle Werte des Intervalls $[-1;1]$ annimmt, hat sie keinen Grenzwert an der Stelle 0. Eine stetige Ausdehnung auf die Menge aller reellen Zahlen ist also hier nicht möglich.