Bernoullische Ungleichung

Klaus-R. Loeffler

26.08.2011

Die Bernoullische Ungleichung besagt, dass für jede natürliche Zahl n und für jede reelle Zahl a, die nicht kleiner als -1 ist, gilt:

$$(1+a)^n \geq 1+na.$$

Der Beweis wird mit Hilfe vollständiger Induktion geführt. Für $n=0$ ergibt sich auf beiden Seiten der Ungleichung der Wert 1, die Aussage ist also offensichtlich richtig.
Setzt man nun für eine natürliche Zahl n die Gültigkeit der Ungleichung voraus, so kann man schließen:

$$(1+a)^{n+1} = (1+a)^n \cdot (1+a) \geq (1+na) \cdot (1+a) = 1+(n+1)a+na^2 \geq 1+(n+1)a;$$

damit ist der Induktionsbeweis abgeschlossen.

0.1 Anwendungen und Folgerungen

0.1.1 Die Potenzfolge (q^n)

1. Für jede reelle Zahl q, die größer als 1 ist, ist die monoton wachsende Folge $(1, q, q^2, q^3, ...)$ unbeschränkt. Denn setzt man $a := q-1$, so ist a eine positive Zahl und man hat:

   $$q^n = (1+a)^n \geq 1+na > na.$$

   Die Folge (na) wächst aber unbeschränkt, denn gäbe es hierfür eine obere Schranke k, so wre $\frac{k}{a}$ eine obere Schranke der natürlichen Zahlen; diese aber sind nach oben nicht beschränkt. Da (na) nach oben nicht beschränkt ist, gilt dies erst recht für die Majorante (q^n).

2. Für jede Zahl q, deren Betrag kleiner als 1 ist, konvergiert die Folge (q^n) gegen null.

   Denn setzt man $Q := \frac{1}{|q|}$, so ist Q größer als 1; daher ist - nach dem vorhergehenden Punkt - mit $a = Q-1$ die Folge (na) eine Minorante zur Folge (Q^n).

   Aus $0 < na < Q^n = 1/|q|^n$ folgt $|qn| < \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{n}$.

   Die Folge (q^n) lässt sich somit betraglich nach oben durch eine Nullfolge abschätzen und ist daher selbst eine Nullfolge.

3. Wenn der Betrag der reellen Zahl q kleiner als 1 ist, konvergiert die Folge $(1, 1+q, 1+q+q^2, 1+q+q^2+q^3, ...)$ gegen $\frac{1}{1-q}$.

   Dies folgt nach dem Bisherigen unmittelbar durch Anwendung von Summen- und Quotientienregel für konvergente Folgen auf die bekannte (für alle reellen Zahlen außer 1 gültigen) Summenformel:

   $$\sum_{i=0}^{n} qi = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

0.1.2 Die Isotonie der Folge $(1+\frac{1}{n})^n$

In der Zusammenstellung zur Exponentialfunktion wurde gezeigt, dass die Folge $(1+\frac{1}{n})^n$ gegen die Eulersche Zahl e konvergiert. Nachfolgend wird bewiesen, dass die Folge streng monoton wächst, also dass für jedes natürliche Zahl n gilt: $(1+\frac{1}{n})^n < (1+\frac{1}{n+1})^{n+1}$.
Zum Nachweis wird zunächst eine Folgerung aus der Bernoullischen Ungleichung bereitgestellt.
Wegen $-\frac{1}{n^2+2n+1})^n \geq -1$ gilt:

$$(1) \qquad (\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1})^n > \frac{n+1}{n+2}$$

Denn $(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1})^n = (1-\frac{1}{n^2+2n+1} \geq 1-n\cdot\frac{1}{n^2+2n+1}\ 1-n\cdot\frac{1}{n^2+2n} = 1-\frac{1}{n+2} = \frac{n+1}{n+2}$.
Durch Multiplikation von (1) mit $(\frac{n+1}{n+2})^n$ folgt aus (1):

$$(2) \qquad (\frac{n}{n+1})^n > (\frac{n+1}{n+2})^{n+1}.$$

Übergang zu den Kehrwerten liefert

$$(3) \qquad (\frac{n+1}{n})^n < (\frac{n+2}{n+1})^{n+1},$$

was äquivalent zur behaupteten Ungleichung ist.

0.1.3 Die Konvergenz der Folge $(\sqrt[n]{a})_n$

Zum Nachweis von

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad (a > 0)$$

ist für $a = 1$ nichts zu zeigen. Im Falle $a > 1$ setze man $d_n := \sqrt[n]{a}-1$; dann ist (d_n) eine Folge positiver Zahlen. Nach Definition von d_n folgt

$$(4) \qquad a = (1+d_n)^n \geq 1 + n\cdot d_n$$

$$(5) \qquad d_n \leq \frac{a-1}{n}$$

Die positive Folge (d_n) hat also eine Nullfolge als Majorante und ist somit selbst eine Nullfolge. Daraus folgt, dass die zu untersuchende Folge gegen 1 konvergiert. Zum Nachweis für $a \in]0;1[$ wende man das letzte Ergebnis auf die Folge $(\sqrt[n]{\frac{1}{a}})$ an; wegen $(\sqrt[n]{\frac{1}{a}}) = (\frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}})$ folgt die Konvergenz gegen 1 dann nach der Reziprokenregel für Grenzwerte.

0.1.4 Die Konvergenz der Folge $(\sqrt[n]{n})_n$

Beim Nachweis von

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

scheitert der zunächst naheliegende Versuch, den vorhergehenden Beweis zu kopieren. Es genügt aber, den Nachweis zu $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sqrt{n}} = 1$ zu führen, da dann wegen $\sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{\sqrt{n}} \cdot \sqrt[n]{\sqrt{n}}$ die behauptete Konvergenz nach der Produktregel für Grenzwerte folgt. Analog zur vorangegangenen Untersuchung definiert man durch $d_n = 1 - \sqrt[n]{\sqrt{n}}$ eine positive Folge (d_n).

Nach Definition von d_n folgt

(6) $\quad \sqrt{n} = (1 + d_n)^n \geq 1 + n \cdot d_n$

(7) $$d_n \leq \frac{\sqrt{n} - 1}{n} = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$$

Die positive Folge (d_n) hat also eine Nullfolge als Majorante und ist somit selbst eine Nullfolge. Daraus folgt, dass die zu untersuchende Folge gegen 1 konvergiert.

0.1.5 Die Folge $(\sqrt[n]{n!})_n$

Nach dem letzten Ergebnis könnte man vermuten, dass sogar die Folge $(\sqrt[n]{n!})_n$ konvergiert. Dass dies nicht der Fall ist, zeigt die folgende Umformung, bei der k und n beliebige positive ganze Zahlen mit $n > k$ sind:

$$\frac{n!}{k^n} = \frac{k!}{k^k} \cdot \frac{(k+1) \cdot (k+2) \cdot (k+3) \cdot \cdot n}{k^{n-k}} \geq \frac{k!}{k^k} \cdot \frac{(k+1)^{n-k}}{k^{n-k}} = \frac{k!}{k^k} \cdot (1 + \frac{1}{k})^{n-k}$$

Mit der Bernoullischen Ungleichung folgt weiter

$$\frac{n!}{k^n} \geq \frac{k!}{k^k} \cdot (1 + \frac{1}{k})^{n-k} \geq \frac{k!}{k^k} \cdot (1 + (n-k) \cdot \frac{1}{k}) = \frac{k!}{k^{k+1}} \cdot (1 + n - k).$$

Zum Beispiel für $n > \frac{k^{k+1}}{k!} + k$ gilt dann

$$\frac{n!}{k^n} \geq 1; \quad \sqrt[n]{n!} \geq k.$$

Die Folge $(\sqrt[n]{n!})_n$ hat daher keine obere Schranke und ist somit nicht konvergent.
Ergänzend - und ohne Beweis - sei angemerkt, dass die in diesem Zusammenhang vielleicht interessante Folge $(\frac{n}{\sqrt[n]{n!}})$ konvergent mit dem Grenzwert e ist.