Eine Verallgemeinerung des Kreuzprodukts

Geht man von der ursprünglichen Fragestellung, die zum Kreuzprodukt führt aus, so sieht man, dass dieser - nur für den dreidimensional Raum sinnvoll erscheinende Begriff - ein Spezialfall einer allgemeineren Fragestellung ist, bei der eine allgemeine Lösung möglich ist. Die allgemeine Aufgabenstellung lautet hierbei: Finde zu n−1 linear unabhängigen Vektoren des Raumes $\mathbb{R}^n$ einen vom Nullvektor verschiedenen Vektor $\mathfrak{x}$, der orthogonal zu den gegebenen Vektoren ist. Dies führt zu einer n-1-stelligen Operation im Raum $\mathbb{R}^n$ mit den bekannten Eigenschaften (Homogenität, Additivität bezüglich jedes der Operanden, Vertauschen zweier Operanden führt zum Gegenvektor etc).
Algebraisch gesprochen bedeutet das, zu dem linearen homogenen Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_a + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = 0\\
&a_{21}x_a + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n = 0\\
&a_{31}x_a + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + ... + a_{3n}x_n = 0\\
&...\\
&a_{n-1,1}x_a + a_{n-1,2}x_2 + a_{n-1,3}x_3 + ... + a_{n-1,n}x_n = 0
\end{aligned}$$

eine vom Nullvektor verschiedene Lösung anzugeben.

Dabei gibt die i-te der n-1 linearen Gleichungen die Bedingung an, dass die Vektoren $\mathfrak{a}_i$ und $\mathfrak{x}$ orthogonal sind, also das Skalarprodukt 0 haben :

$$\mathfrak{a}_i * \mathfrak{x} = \begin{pmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ ... \\ a_{in} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = 0.$$

Die lineare Abbildung φ von $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^{n-1}$, deren Koeffizientenmatrix aus den Koeffizienten a_{ij} des obigen Gleichungssystems besteht, hat den Rang n−1; der Kern von φ hat also die Dimension 1. Ein Basisvektor dieses Kerns erfüllt somit die oben an das verallgemeinerte Kreuzprodukt gestellte Bedingung.
Ein solcher Basisvektor des Kerns ergibt sich, indem man die Determinante der formalen Matrix

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{e}_1 & \mathfrak{e}_2 & \cdots & \mathfrak{e}_{n-1} & \mathfrak{e}_n \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \end{pmatrix}$$

berechnet, wobei mit $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, ..., \mathfrak{e}_n$ die Vektoren der kanonischen Basis des Raumes $\mathbb{R}^n$ bezeichnet werden.

Der Nachweis, dass der so erhaltene Vektor orthogonal zu $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_{n-1}$ ist und (bei linearer Unabhängigkeit der $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_{n-1}$) verschieden vom Nullvektor ist, setzt Grundkenntnisse der linearen Algebra voraus, die in der Schule im Regelfall nicht vermittelt werden, und wird daher hier nicht gegeben.

Bezeichnet man das verallgemeinerte Kreuzprodukt der Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_{n-1}$ mit $X(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_{n-1})$, so ergeben sich für n=2 und n= 3 die folgenden Spezialfälle.

<u>n=2:</u> Hier wird zu einem Vektor $\mathfrak{a}$ des Raumes $\mathbb{R}^2$ ein orthogonaler gesucht. Die Formel

liefert: $X(\mathfrak{a}) = \begin{vmatrix} \mathfrak{e}_1 & \mathfrak{e}_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - a_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \\ -a_1 \end{pmatrix}.$

<u>n=3:</u> Die „Standardaufgabe", bei der ein zu $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ orthogonaler Vektor gesucht wird:

$$X(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) = \begin{vmatrix} \mathfrak{e}_1 & \mathfrak{e}_2 & \mathfrak{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ -(a_1 b_3 - a_3 b_1) \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}.$$

Höhere Dimensionen führen (erwartungsgemäß) zu einem erheblich gesteigerten Rechenaufwand. Aufgrund einer Nachfrage in der Newsgroup de.sci.math (die auch diese Zusammenstellung zum Kreuzprodukt ausgelöst hat), wird nachfolgend noch die Berechnung im Raum $\mathbb{R}^4$ angegeben. Für $X(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c})$ erhält man in diesem Fall:

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{e}_1 & \mathfrak{e}_2 & \mathfrak{e}_3 & \mathfrak{e}_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 & a_4 \\ b_2 & b_3 & b_4 \\ c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_3 & c_4 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_4 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 & a_4 \\ b_2 & b_3 & b_4 \\ c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_3 & c_4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

<u>Abschließende nichtmathematische Bemerkung</u>

Die Frage, ob es höhere Dimensionen als die dritte (außerhalb unserer Wahrnehmung) „gibt“, ist nicht mathematisch, sondern allenfalls philosophisch/physikalisch zu beantworten, genauso, wie sich wohl nicht entscheiden lässt, ob die Mathematik eine Teilmenge der realen Objekte darstellt oder umgekehrt die von uns wahrgenommene Realität nur unser Bild von einer isomorphen Teilmenge der Mathematik ist.

Dem naiven Leser, der glaubt, aufgrund unserer Anschauung die Existenz höherer Dimensionen verneinen zu können, sei das Buch „Silvestergespräche eine Sechsecks“ von Dionys Burger empfohlen. Hier wird auf schülergerechte Weise verdeutlicht, warum sich die Frage nach der Existenz höherer Dimensionen nicht auf der Basis unserer Realitätswahrnehmung beantworten lässt.

Löffler, 2006-10-22