Kurvendiskussion im Grundkurs

- eine schematische Anleitung

Klaus-R. Löffler

1. Vorbemerkung Das Ziel einer Kurvendiskussion ist die Beschreibung der wesentlichen Verlaufseigenschaften des Graphen einer gegebenen Funktion. Während früher im Mathematikunterricht dieser Aufgabentyp besonders beliebt war, obwohl (oder weil?) er sehr schematisch zu erlernen war und mittlerweile von vielen Computer-Programmen nahezu perfekt durchgeführt werden kann, ist der Umfang innerhalb des Mathematikunterricht des Gymnasiums in letzter Zeit etwas zurückgegangen. In der nachfolgenden Darstellung wird rezeptartig ein Verfahren angegeben, was besonders denen helfen mag, die an mathematischen Zusammenhängen weniger interessiert sind als an effektiven Vorgehenshinweisen.

2. Vorbemerkung Während die Untersuchung von Kurveneigenschaften je nach vorgelegter Funktion durchaus abwechslungsreich sein kann, indem Stetigkeits-, Differenzierbarkeits- und andere Grenzwertüberlegungen erforderlich sind, wird hier eine stark vereinfachte Grundsituation zugrunde gelegt: Wir gehen von dem einfachen Fall aus, dass die gegebenen Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall [a; b] gegeben ist und dort beliebig oft differenzierbar ist. Damit werden zwar bereits so einfache Funktionen wie die Wurzelfunktion auf [0; 1] aus der Betrachtung ausgeschlossen, dennoch wird ein großer Teil der üblicherweise im Grundkurs der Stufe 11 betrachteten Funktionen erfasst, insbesondere sind hierbei alle auf ein abgeschlossenes Intervall eingeschränkten ganzrationalen Funktionen, also die Funktionen, deren Term ein Polynom ist.

3. Vorbemerkung Die Anfertigung einer Wertetabelle, oft letzter Rettungsanker für Ratlose und dank Tabellenkalkulation selbst bei kleiner Schrittlänge und entsprechend vielen Werten von geringer Mühe, ist ohne die Ermittlung der kritischen Stellen ein Akt der Hilflosigkeit und mathematisch von zweifelhaftem Wert. Denn da naturgemäß nur eine endliche Zahl von Punkten des Graphen auf diese Weise ermittelt werden kann, bleibt das Verhalten der Kurve an den anderen Stellen offen. Man weiß also von der Kurve fast nichts und kann allenfalls hoffen, dass der Eindruck des Kurvenverlaufs, den man durch Verbinden der ermittelten Punkte gewinnt, zutreffend ist.

Die für die Durchführung einer Kurvendiskussion erfordert Grundfertigkeiten beim

- Lösen von Gleichungen,
- Berechnen von Ableitungen.

Eine wichtige Grundidee bei der Kurvendiskussion besteht in der Ausnutzung einer besonders friedlichen Eigenschaft der betrachteten Funktionen:
Sie können ihr Vorzeichen nur an Nullstellen ändern. Diese Eigenschaft stetiger Funktionen auf abgeschlossenen Intervallen liefert die entscheidende Hilfsüberlegung: Außerhalb von Nullstellen erfolgt eine solche Änderung nicht, zwischen zwei benachbarten Nullstellen ist das Vorzeichen also einheitlich.

Sie können ihr Vorzeichen nur an Nullstellen ändern. Diese Eigenschaft stetiger Funktionen auf abgeschlossenen Intervallen liefert die entscheidende Hilfsüberlegung: Außerhalb von Nullstellen erfolgt eine solche Änderung nicht, zwischen zwei benachbarten Nullstellen ist das Vorzeichen also einheitlich. Damit ergibt sich als wesentlicher Teil zur Vorbereitung der Kurvendiskussion die Bestimmung der Nullstellen.
Der entweder bewiesene oder anschaulich als plausibel akzeptierte globale Wachstumssatz für differenzierbare Funktionen sagt aus: Wenn die Ableitung einer Funktion über einem abgeschlossenen Intervall positiv ist, dann steigt der Graph über diesem Intervall streng monoton. Wendet man diese Aussage auf die Ableitung der Funktion an, dann ergibt sich, dass der Graph einer Funktion über einem Intervall linksdrehend verläuft, wenn dort die zweite Ableitung positiv ist.
Mit der gegebenen Funktion f über [a; b] sind nun die folgenden Schritte auszuführen, wobei die letzten beiden Schritte im beigefügten Beispiel in umgekehrter Reihenfolge gemacht werden:

1. Berechnung von f' und f'',
2. Bestimmung der Nullstellen von f, f' und f'',
3. Erstellung von Vorzeichen- und Wertetabelle für die kritischen Stellen,
4. Skizze des Graphen,
5. Zusammenhängende Verlaufsbeschreibung.

Die Nullstellen von f, von f' und von f'' bilden zusammen mit den Intervallenden a und b die kritischen Stellen des Definitionsbereichs. Diese Stellen sind insofern hervorgehoben, als alle untersuchten besonderen Punkte, also Nullpunkte, Hoch- und Tiefpunkte und Wendepunkte nur an diesen Stellen auftreten können; alle anderen Stellen sind in diesem Sinne unkritisch.
Es werden nun zwei Tabellen aufgestellt, eine Vorzeichentabelle und eine Wertetabelle. Die Vorzeichentabelle gibt an, über welchen Intervallen der Graph oberhalb- oder unterhalb der x-Achse verläuft, steigt oder fällt, links- oder rechtsherum dreht. Der Wertetabelle sind die Koordinaten der - anhand der Vorzeichentabelle zu klassifizierenden - kritischen Punkte sowie die Steigung des Graphen in diesen Punkten zu entnehmen.
Zum Zeichnen des Graphen wird anhand des minimalen und maximalen Funktionswerts - abzulesen aus der Wertetabelle - ein geeigneter Maßstab gewählt, dann werden die kritischen Punkte sowie - als Strecken - kleine Stücke der Tangenten in diesen Punkten eingezeichnet. Nach diesen - exakt vorzunehmenden - Eintragungen lässt sich freihändig der Verlauf des Graphen einzeichnen.
Beispiel: Kurvendiskussion zu der auf [-1,5; 1,5] durch $f(x) = x(x-1)(x+1)^2$ gegebenen Funktion f. Ausmultiplizieren ergibt $f(x) = x^4 + x^3 - x^2 - x$. Man erhält als

Ableitungen:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3 + 3x^2 - 2x - 1; \\ f''(x) &= 12x^2 + 6x - 2 \end{aligned}$$

Die Nullstellenmenge von f ist unmittelbar an der Faktorform von $f(x)$ abzulesen: $O(f) = \{-1; 0; 1\}$. Zur Bestimmung der Nullstellen von f' ist eine Gleichung 3. Grades zu lösen; da dies in der Regel nicht im Grundkurs erlernt wird, kann die exakte Lösung nur bestimmt werden, wenn die linke Seite der Gleichung $f'(x) = 0$ durch Abspalten eines Linearfaktors vereinfacht werden kann. Dabei ist - wie aus dem Unterricht als Folgerung aus dem Divisionssatz für Polynome bekannt ist - genau dann eine Zerlegung mit dem Faktor $x - a$ möglich, wenn a eine Lösung der Gleichung (also eine Nullstelle von f') ist. Im vorliegenden Fall kann man bereits aus der Faktorform der Funktionsgleichung von f, bei

der -1 als doppelte Nullstelle zu erkennen ist, auf -1 als Nullstelle von f' schließen. Kann - oder will - man so nicht schließen, so muss eine Nullstelle von f' „geraten“werden.
Dabei ist zu beachten, dass die ganzzahligen Nullstellen eines Polynoms mit ganzzahligen Koeffizienten stets Teiler des variablenfreien Summanden sein müssen. Im vorliegenden Fall ist dieser Summand -1, so dass die einzigen Kandidaten für ganzzahlige Nullstellen -1 und 1 sind; probeweises Einsetzen liefert, dass -1 eine Nullstelle von f' ist.
Mit Polynomdivision durch $x+1$ erhält man

$$f'(x) = (x+1) \cdot (4x^2 - x - 1);$$

die Lösung der quadratischen Gleichung $4x^2 - x - 1 = 0$ liefert die Lösungen $0,125 - 0,125 \cdot \sqrt{17}$ und $0,125 - 0,125 \cdot \sqrt{17}$, also erhält man $O(f') = \{-0,39; 0,64\}$.
Die quadratische Gleichung $f''(x) = 0$, also $12x^2 + 6x - 2 = 0$ hat die Lösungen $-0,25 - 0,25 \cdot \sqrt{\frac{11}{3}}$ und $-0,25 + 0,25 \cdot \sqrt{\frac{11}{3}}$; somit folgt $O(f') = \{-0,73; 0,23\}$.
Die Menge der kritischen Stellen ist daher $\{-1,5; -1; -0,73; -0,39; 0; 0,23; 0,64; 1; 1,5\}$.
Die neun kritischen Punkte werden mit A..I bezeichnet; unter Verwendung von überall auf zwei Nachkommastellen gerundete Werte erhält man die folgende

Wertetabelle:

Punkt	A	B	C	D	E	F	G	H	I
x	$1,5$	-1	$-0,73$	$-0,39$	0	$0,23$	$0,64$	1	$1,5$
$f(x)$	$0,94$	0	$0,09$	$0,20$	0	$-0,27$	$-0,62$	0	$4,69$
$f'(x)$	$-4,75$	0	$0,50$	0	-1	$-1,25$	0	4	$16,25$
$f''(x)$		4	0		-2	0		16	

Auf die Bestimmung der nicht eingetragenen Werte für $f''(x)$ kann verzichtet werden.

Bemerkung: Auf die Berechnung von Funktionswerten von f'' kann generell verzichtet werden, wenn das Vorzeichenverhalten dieser Funktion bereits bekannt ist.

Unter den Funktionswerten sind auch Maximum und Minimum der Funktion. Im vorliegenden Fall entnimmt man der Tabelle, dass alle Werte im Intervall [-1; 5] liegen. Da das Definitionsintervall die Länge 3, das Werteintervall eine Länge < 5 hat, kann man z.B. in einem Standardschulheft für eine annährend heftgroße Skizze als Einheit auf der x-Achse 5cm, als Einheit auf der y-Achse 4cm wählen.
In der Vorzeichentabelle werden nun die Nullstellen von f, f' und f'' eingetragen und als Begrenzungen markiert: Jeweils zwischen zwei benachbarten solcher Begrenzungen ist das Vorzeichen der Funktion einheitlich. Im Fall der speziell betrachteten Funktion ergibt sich nach Eintragen der Nullstellen zunächst die folgende

Vorzeichentabelle:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
x	$-1,5$	-1	$-0,73$	$-0,39$	0	$0,23$	$0,64$	1	$1,5$
$f(x)$	> 0	$\vert$	> 0		$\vert$	< 0		$\vert$	> 0
$f'(x)$	< 0	$\vert$	> 0	$\vert$		< 0	$\vert$		> 0
$f''(x)$		> 0	$\vert$		< 0	$\vert$		> 0	

Aus der Vorzeichentabelle entnimmt man nun $f''(-1) > 0, f''(0) < 0$ und $f''(1) > 0$.
Daher ist f'' über den Intervallen [-1,5; -0,73 [und] 0,23; 1,5] positiv und über]-0,73; 0,23 [negativ.

Dieses Ergebnis lässt sich auch ohne Berechnung von Funktionswerten aus dem bekannten Verlauf der nach oben geöffneten Parabel zweiter Ordnung erschließen. Die Werte der Funktion sind bekanntlich zwischen den Nullstellen negativ, rechts und links von den Nullstellen positiv.
Die weiteren Vorzeichen lassen sich nun schrittweise von unten nach oben in die Tabelle eintragen. Weil f'' über [-1,5; -,73 [positiv ist, wächst f' über diesem Intervall streng monoton, muss also links von der Nullstelle -1 negativ und rechts von ihr positiv sein. Entsprechend (oder unter Verwendung der Zahlen aus der Wertetabelle) lassen sich die weiteren Vorzeichen eintragen, so dass sich insgesamt der folgende Vorzeichenverlauf ergibt:
Hieraus lässt sich nun der gesamte Verlauf vom Anfangspunkt A bis zum Endpunkt I ablesen:

Verlaufsbeschreibung: Der Graph beginnt im Punkte A und fällt linksdrehend bis zum Nullpunkt B, steigt dann - weiterhin linksdrehend - bis zum Wendepunkt C, geht dort in eine Rechtsdrehung über und steigt weiter bis zum lokalen Hochpunkt D. Dann fällt der Graph rechtsdrehend über den Nullpunkt E zum Wendepunkt F, fällt linksdrehend weiter zum absoluten Tiefpunkt G und steigt danach - weiterhin linksdrehend über den Nullpunkt H zum absoluten Hochpunkt I.

Die folgende Tabelle gibt eine Übersicht über die kritischen Punkte P, ihre Koordinaten x_P und y_P, die Steigung m_P der Kurve in diesen Punkten und die besonderen Eigenschaften dieser Punkte im Bezug auf die Kurve.

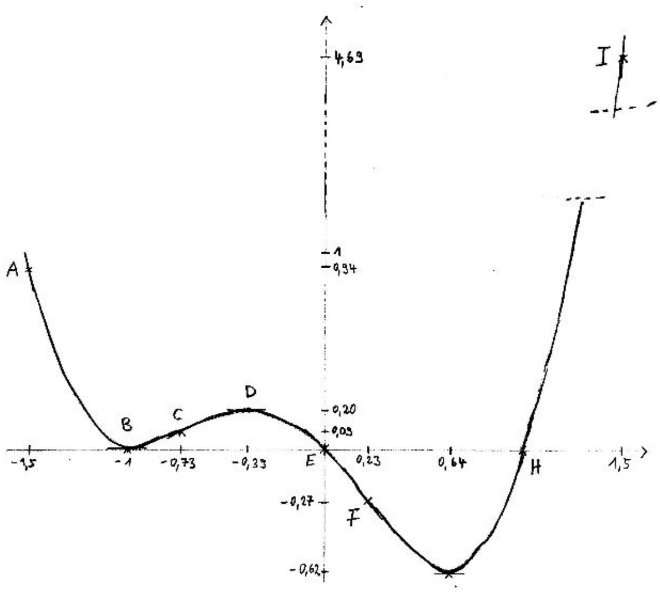
P	x_P	y_P	m_P	Eigenschaften von P
A	$-1,5$	$0,94$	$-4,75$	Anfangspunkt, lokaler Hochpunkt
B	-1	0	0	Nullpunkt, lokaler Tiefpunkt
C	$-0,73$	$0,09$	$0,5$	LR – Wendepunkt
D	$-0,39$	$0,2$	0	lokaler Hochpunkt
E	0	0	-1	Nullpunkt
F	$0,23$	$0,27$	$-1,25$	RL – Wendpunkt
G	$0,64$	$-0,62$	0	Absoluter Tiefpunkt
H	1	0	4	Nullpunkt
I	$1,5$	$6,76$	$16,25$	absoluter Hochpunkt

Das Skizzieren des Graphen

Die zeichnerische Darstellung des Graphen erfolgt in vier Schritten, nachdem (s.o.) eine zweckmäßige Einheit für die beiden Achsen ermittelt worden ist:

- Zeichnen des Koordinatenkreuzes; hier sollten auf den Achsen mindestens die Einheiten sowie die jeweiligen Koordinaten der kritischen Punkte eingetragen werden.
- Eintragen der kritischen Punkte; die Beschriftung sollte allerdings erst vorgenommen werden, wenn der Verlauf des Graphen schon skizziert worden ist.
- Einzeichnen von Tangentenstücken bei den kritischen Punkten. Die jeweilige Steigung ist z.B. aus der Wertetabelle abzulesen.
- Skizzieren des Graphen und Beschriften der kritischen Punkte.

Für das betrachtete Beispiel ergibt sich eine der folgenden ähnliche Skizze:



Durch Verwendung von Millimeterpapier lässt sich das Zeichnen des Graphen wesentlich erleichtern.

Alternative Sprechweisen

- Der Punkt mit den Koordinaten $(c|f(c))$ ist ein absoluter Hochpunkt des Graphen von f
  $\Leftrightarrow$ f nimmt bei c sein Maximum an.
- Der Punkt mit den Koordinaten $(d|f(d))$ ist ein lokaler Tiefpunkt des Graphen von f
  $\Leftrightarrow$ f nimmt bei d ein relatives Minimum an.

Bemerkung

Unter dem Maximum einer Funktion f versteht man - im Falle der Existenz - das Maximum der Wertemenge von f; unter einem relativen Maximum einer Funktion f versteht man das Maximum der auf eine nichtleere Teilmenge T des Definitionsbereichs von f eingeschränkten Funktion $f|_T$. Hierbei entsteht T durch Schnitt des Definitionsbereichs von f mit einer offenen Menge.
Der sprachlichen Ungenauigkeit sind bei dem ständigen Wechsel zwischem algebraischen Aussagen als Begründung für geometrisches Verhalten Tür und Tor geöffnet; das geht manchmal so weit, dass sogar die Stelle im Definitionsbereich, an der das Maximum angenommen wird, fehlerhafterweise als Maximum der Funktion bezeichnet wird, obwohl dieses ein Element der Wertemenge, also von Bild(f) ist.

Hinweis

Das über die Website des Verfassers erhältliche Programm *Polynom5* führt zu beliebigen Polynomen dritten bis fünften Grades eine Kurvenuntersuchung durch, wobei die mathematischen Schritte zur Ermittlung der Ergebnisse beschrieben werden.

(Letzte Bearbeitung 2013-01-04)